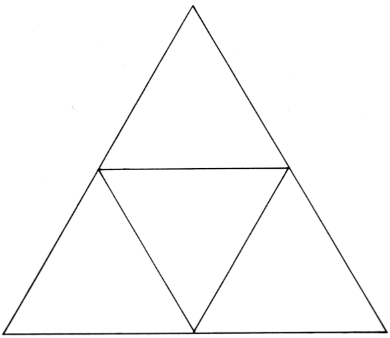
フラクタル集合の幾何学

K.J.ファルコナー 著／畑 政義 訳



近代科学社

親愛なる父母に捧ぐ

THE GEOMETRY OF FRACTAL SETS

by

K. J. Falconer

まえがき

本書は，非整数および整数のハウスドルフ次元をもつ集合に関する数学的理論を厳密に取り扱った小冊子である．主として，応用よりも幾何学的理論の方に重点を置いている．いままでのところ，本書の内容の大半は，引用した原論文以外，他書には見られないようである．しかし，その原論文の多くは旧式の記号を用いて非常に技巧的に書かれており，混乱を引き起こしかねない．そこで，この理論がもっと身近で理解しやすいものとなるように，また本書がフラクタル集合についての便利で正確な解説書となるように願いながら，執筆に従事した次第である．

本書は，主として純粋数学者向けに書かれてはいるが，数学を専門としない読者にとっても有用であろう．少なくとも，フラクタル集合に興味をもつ人にとっては，その専門分野が何であれ，本書は便利な参考書となるに違いない．基本的な定義とともに，本書の主定理や系を読めば，厳密に証明された数学的内容を正確に理解することができよう．

一読して本書の全体像を把握するためには，細かな証明をとばし，主要な結果とそれに付随した基本的な注釈を読むだけで事足りるであろう．また，数学を専門としない読者は，技術的立場から測度の一般論を述べた1.1節を省略して差し支えない．

細部にいたるまで本書を完全に理解するためには，数学解析と一般位相についての初等的な知識が必要である．もちろん，この理論の核心部におけるいくつかの証明は，かなり長くて難しいものであるが，それらを理解していけば，そこに秘められた数学の美しくて精巧な世界を眺めることができるのである．

Vitaliの被覆定理，網測度，そしてポテンシャル論的方法は，いずれも基本的な数学の道具であり，本書ではきわめて重要である．

第1章の初めの2節において，一般の測度およびハウスドルフ測度に関する基本的性質を述べる．ここで強調しておきたいのは，本書を通じ，測度は単に積分を定義するためのものではなくて，集合の大きさを測るという本来の意味

で用いられているという点である．積分は，後の章で，単なる便利な道具として用いられるが，もちろん，積分自体のもっている直観的意味は十分に活用されてしかるべきである．

本書では，主にn次元ユークリッド空間内の集合を取り扱うのであるが，多くの概念は，より一般の距離空間にそのまま適用することができる．また，高次元での証明がかなり複雑になるような定理については，単に2次元での証明を述べるにとどめておいた．一般の場合の証明については，参考文献を参照していただきたい．同様にして，1次元あるいは2次元での証明が一般の場合での証明の本質的内容を含んでいるような定理に対しても，単に1次元あるいは2次元での証明のみを述べることにした．また，ハウスドルフ測度についても，本書では，一般の関数に対応した測度ではなくて，単にs次元を定めるような測度に制限している．

いくつかの証明は，原論文の証明と比べて，ある程度簡単になっていると思う．証明をさらに簡潔にすることは可能であろうが，残念ながら限られた時間内では無理であった．

本書は，なるべく他書を引用しないで済むように書いたつもりである．ここに述べた諸結果の変形あるいは拡張については簡単に触れるにとどめておいた．詳しくは参考文献を参照していただきたい．また，各章の終わりに，その章で述べた定理の変形や一般化を練習問題として載せておいた．

本書の出版にあたり，多くの方々に御世話になった．ここに厚く感謝の意を表わす次第である．特に，Roy Davies 教授には，原稿を注意深く読んで批評していただき，さらに未発表論文を読む機会も与えていただいた．また，Hallard Croft 博士には，証明を読んで多くの助言をいただいた．さらに，B. B. Mandelbrot, J. M. Marstrand, P. Mattila, C. A. Rogers 各教授には有益な助言をいただき，ここに深く感謝したい．

原稿をタイプしていただいた Maureen Woodward 夫人と Rhoda Rees 夫人に，また出版までのあらゆる段階で協力していただいた Cambridge University Press の David Tranah 氏と Sheila Shepherd さんに深く感謝したい．最後に，本書の草案を読み，始終，励まし支えてくれた妻 Isobel に深く感謝する次第である．

序　　章

整数および非整数次元をもつ集合に関する幾何学的測度論は，今世紀初頭から，純粋数学者たちによって進展してきたものである．最近では，いろいろな科学分野において，フラクタル集合の重要性がますます認識されつつある．Mandelbrot (1975, 1977, 1982) は，分子の世界から宇宙にいたるまでの幅広い自然現象のモデルにフラクタル集合を活用した開拓者である．例えば，微粒子のブラウン運動，流体における乱流現象，植物の成長，地理学としての海岸線や地表面，宇宙における銀河分布，そして株式取引の相場変動などである．もちろん，純粋数学の分野においても，例えば数論とか非線型微分方程式の理論において，非整数次元をもつ集合が出現しているのである．Mandelbrot の，イラストを豊富に含んだ科学的で哲学的でもある本の中には，その他多くの例が書かれている．このように，純粋数学に起源をもつフラクタルという概念が自然科学のいろいろな分野に多くの応用を見出すことができるし，同時にまた，フラクタルは数学の世界にも次々と新しい問題を提供しているのである．

フラクタル (fractal) は，Mandelbrot (1975) がラテン語の「fractus」(「砕けた」とか「半端な」という意味) から造った言葉である．彼は，フラクタル集合とはハウスドルフ次元が位相次元よりも真に大きい集合のことであるという定義を試みに与えた．しかし，彼も指摘しているように，ハウスドルフ次元と位相次元が一致していても，明らかにフラクタルの一種と考えられるような特異集合が存在するのである．したがって，この定義で十分であるとは言い難い．もちろん，そのような集合は従来からよく知られており，例えば，「非整数次元の集合」「ハウスドルフ測度をもつ集合」「繊細な構造の集合」あるいは「特異集合」などとさまざまに呼ばれていたものである．このような集合に関する数学的研究は，ハウスドルフ次元と位相次元が一致するような集合に関する研究も含んでいるのが普通であるから，本書では，なめらかな曲線や曲面といった通常の集合も合わせて考察することにした．

点，曲線および曲面がそれぞれ 0, 1 および 2 次元の集合であるという考えを

一般化して，特異な集合に対しても，その「大きさ」あるいは「次元」を測る多くの方法が提案されている．その中でも，完全加法性をもつハウスドルフ測度から定義されるハウスドルフ次元は，数学者にとって実に有用なものである．しかしながら，比較的単純な集合に対してでさえも，そのハウスドルフ測度や次元を厳密に計算することは容易ではない．特に，下からの評価を与えるのが難しいのである．このことは，物理学への応用に際しては大きな障害になっており，そのためにさまざまに変形したハウスドルフ次元の定義が，ある場合には不正確な形で，一般に採用されているのが現状である．

Hurewicz & Wallman(1941)，Kahane(1976)，Mandelbrot(1982, 39 節) および Tricot(1981, 1982) には，いろいろな次元の定義とハウスドルフ次元との比較が概説されている．特に，エントロピーとの関連については Hawkes (1974)，相似次元については Mandelbrot(1982)，そして局所次元と測度については Johnson & Rogers(1982) をそれぞれ参照していただきたい．このように，いろいろな次元に関して多くの性質が研究されているが，最も広く研究され，かつ応用されているのは，疑うことなく，ハウスドルフ測度および次元なのである．

区間の長さという概念を直線上のより複雑な集合に拡張するために，外測度を定義するという考えは，それほど古いものではない．Borel(1895) は測度を用いて集合の大きさを測り，ある種の病的な関数を構成している．後に，Lebesgue(1904)はこの考えを取り上げ，彼の積分の構成における基礎概念としたのである．Carathéodory(1914) は，さらに一般の，いわゆる「Caratéodory の外測度」を導いた．特に，彼は n 次元ユークリッド空間において「1 次元測度」あるいは「線形測度」と呼ばれるものを定義し，他の自然数 s に対しても同様に s 次元測度が定義できることを示した．その後，Hausdorff(1919)は，Carathéodory の定義は**非整数**の s に対しても意味があることを指摘し，実際に，有名なカントールの 3 進集合が $s=\log 2/\log 3=0.6309\cdots$ のときに，正で有限の s 次元測度をもつことを示したのである．このようにして非整数次元の概念が誕生し，そのような測度と次元に対して Hausdorff の名が冠せられるようになったのである．

それ以後，ハウスドルフ測度およびハウスドルフ可測集合の幾何学に関するぼう大な量の発見がなされている．Rogers(1970) の本には，測度論の本質をと

らえた素晴らしい記述があるので参照していただきたい．また，Federer(1969)は，きわめて一般的に幾何学的測度論を論じ，表面積とホモロジー積分論に関する問題まで取り扱っている．

ハウスドルフ測度とその幾何学に関する数学的結果の多くはBesicovitchによって与えられたものであり，彼の名前は本書で何度も引用されるだろう．実際，長い間ハウスドルフ測度に関するほとんどの論文には事実上彼の名前が載っていたほどである．彼の多くの論文には，きわめて精巧な議論が展開されており，最近では彼の弟子たちが多くの寄与をなしている．Besicovitchがこの分野においていかに大きな貢献をしたかについては，Burkill(1971)およびTaylor(1975)による追悼記事に詳しい．

Besicovitchが，生前に*The Geometry of Sets of Points*(点集合の幾何学)という題で幾何学的測度論に関する本を書こうとしていたことは確かなようである．おそらく，多くの点で本書に似通ったものであったろうと想像される．彼の死後(1970年)，Roy Davies教授は，Helen Alderson博士(1972没)の協力のもとに，Besicovitchの書こうとしていた本の第1章の草稿を作成した．この章の続きはついに書かれることはなかったが，これが本書の初めの部分に大きな影響を与えているのである．

第1章では，ハウスドルフ測度を定義し，その基本的性質をいくつか述べる．そして，簡単な例を用いて，いかにしてハウスドルフ次元および測度を計算するのかを解説する．

本書では，s集合，すなわち，正で有限のs次元ハウスドルフ測度をもつような集合を特に詳しく論じる．そのような集合の幾何学は，必然的に，点の近傍の研究が中心となるので，続く3つの章において，各点における集合の密度と，各点における方向別の集合分布，すなわち，接線の存在に関する問題という局所的な性質を論じる．また，次元が整数であるか非整数であるかに応じて別々に取り扱う．定義によって，非整数次元をもつ集合はフラクタルであるが，整数次元をもつ集合の中にも，通常の曲線および曲面のような集合とは著しく異なる特異な集合が存在するのである．

第5章では，強力な数学の道具である網測度を導入する．これを用いて，s次元測度が無限大であるような集合は，必ずs集合を含んでいるという事実を示すことができ，これによってs集合に関する理論がより一般化されるのであ

る．また，この網測度は直積集合のハウスドルフ測度の研究にも用いられる．

第6章では，低次元部分空間への射影を取り扱う．ここでは，直接的な幾何学的考察の代わりに，ポテンシャル論における方法を導入する．

第7章においては，掛谷問題，すなわち，単位長の線分がその内部で自由に回転できるような図形の中で測度が最小になるものを求める問題を論じる．さらに，それを変形したいくつかの問題を論じ，この問題が前章で扱った射影に関する定理と双対的な関係にあることを示す．また，調和解析学との関連についても論じる．

最後の章では，さまざまなフラクタル集合の例を述べ，本書の前半で述べた幾何学的測度論との関連を論じる．

本書の終わりに参考文献の一覧表を載せた．著書あるいは論文の発表年によって引用することができる．Federer(1947, 1969)，Rogers(1970) および Mandelbrot(1982) には，さらに多くの文献が掲載されているので，必要に応じて参照していただきたい．

記 号 表

一般に，記号は最初に導入した時点で定義する．本書におけるすべての記号の使用法を一貫して述べることは，特に最終章においては大変面倒であるので，ここでよく用いられる記号の概略を述べることにする．

本書では，n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ 内の集合を取り扱う．$\mathbb{R}^n$ 内の点は $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ などの小文字によって表わし，場合によってはベクトルとして扱う．また，直交座標表示 (x, y) を用いることもある．大文字 E, F, Γ などは $\mathbb{R}^n$ 内の部分集合に用い，筆記体大文字 $\mathcal{C}$, $\mathcal{V}$, $\mathcal{I}$ などは集合族を表わすのに用いる．集合の包含関係を示す記号 $\subset$ は，等号の可能性も含むものとする．集合 E の直径は $|E|$ で表わすが，混乱のない限り，ベクトルの長さに対しても同じ絶対値記号を用いる．すなわち，$|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|$ は2点 $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ の距離を表わす．$b, c, \varepsilon, \delta$ などの小文字は定数として，また i, j, k などは添字として用い，c_1, j_i などのように添字を伴うこともある．

次の記号表は，よく用いられる記号を説明したものである．

集　　合

$\mathbb{R}^n$	n 次元ユークリッド空間．
$B_r(\boldsymbol{x})$	中心 $\boldsymbol{x}$，半径 r の閉円板あるいは閉球．
$S_r(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\theta}, \phi)$	頂点 $\boldsymbol{x}$，半径 r の，ベクトル $\boldsymbol{\theta}$ に関して角 ϕ の範囲内にある扇形集合．
$C_r(\boldsymbol{x}, I)$	2つの扇形集合を向かい合わせにした集合．
$R(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$	中心が $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ の円対の共通領域．
$G_{n,k}$	$\mathbb{R}^n$ 内の k 次元部分空間からなるグラスマン多様体．
$L(a, b)$，$L(E)$	直線族．
$\bar{E}$，$\mathrm{int}\, E$	E の閉包，E の内部．
$[E]_\delta$	E の δ 平行体．

写　像

proj_θ, proj_Π	θ 方向の直線，および平面 Π 上への正射影.
$\hat{f}$, $\hat{\mu}$	関数 f，および測度 μ のフーリエ変換.
$f\circ g$	写像 f と g の合成.

測度など

$\mathcal{H}^s$	s 次元ハウスドルフ(外)測度.
$\mathcal{L}^n$	n 次元ルベーグ測度.
$\mathcal{M}^s$	s 次元網測度.
$\mathcal{H}^s_\delta$, $\mathcal{M}^s_\delta$	$\mathcal{H}^s$ および $\mathcal{M}^s$ の構成に用いられる δ 外測度.
$\mathcal{L}(\Gamma)$	曲線 Γ の長さ.
$\dim E$	E のハウスドルフ次元.
ϕ_t, C_t, I_t	t ポテンシャル，t 容量，および t エネルギー.

密　度

$D^s(E,x)$	点 x における E の密度.
$\underline{D}^s(E,x)$, $\bar{D}^s(E,x)$	E の下密度，および上密度.
$\bar{D}^s_c(E,x)$	E の上凸密度.
$\underline{D}^s(E,x,\theta,\phi)$	E の下角密度.

目　次

1

測度と次元

1.1　測度論の基礎

この節では，後に必要となる測度論についての基本事項をまとめておこう．詳しくは， Kingman & Taylor(1966) あるいは Rogers(1970) を参照してもらいたい．

Xを任意の集合としよう．(単に， Xを n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ と考えて読み進んでも差し支えない．) Xの部分集合を元にもつような空でない集まり$\mathcal{S}$を考えよう． このとき， $\mathcal{S}$が **σ 集合体**(σ–field)であるとは， $\mathcal{S}$が補集合をとる操作および可算個の和集合をとる操作に関して閉じているときにいう．(つまり， $E\in\mathcal{S}$ならば $X\backslash E\in\mathcal{S}$ が成り立ち，また， $E_1, E_2, \cdots\in\mathcal{S}$ ならば $\bigcup_{j=1}^{\infty}E_j\in\mathcal{S}$ が成り立つとき．) すると，σ 集合体は差集合をとる操作および可算個の共通集合をとる操作に関しても閉じていること， さらに， 全体集合 X と空集合 ϕ を必ず含んでいなければならないことが容易にわかる．

集合列 $\{E_j\}$ が与えられたときに，その **下極限**(lower limit)および**上極限**(upper limit)を，それぞれ次のように定義しよう．

$$\varliminf_{j\to\infty} E_j=\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{j=k}^{\infty} E_j,$$

$$\varlimsup_{j\to\infty} E_j=\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{j=k}^{\infty} E_j.$$

言い換えれば，$\underline{\lim}\,E_j$ は有限個を除いた残りすべての E_j に共通に属するような点からなる集合であり，$\overline{\lim}\,E_j$ は無限個の E_j に共通に属しているような点からなる集合のことである．したがって，すべての E_j が σ 集合体 $\mathcal{S}$ に属していれば，定義よりただちに，$\underline{\lim}\,E_j$，$\overline{\lim}\,E_j$ も $\mathcal{S}$ に属する．また，$\underline{\lim}\,E_j=\overline{\lim}\,E_j$ が成り立つときには，この集合を $\{E_j\}$ の極限といい，単に $\lim E_j$ と書く．例えば，$\{E_j\}$ が単調増大列あるいは単調減少列になっていれば，必ずその極限 $\lim E_j$ が存在する．

さて，X の部分集合を元にもつ任意の集まり $\mathcal{C}$ を考えよう．このとき，$\mathcal{C}$ を含むすべての σ 集合体を考え，それらの共通部分をとれば，それ自身もやはり σ 集合体になっていることがわかる．これを，**$\mathcal{C}$ によって生成された σ 集合体** (σ-field generated by $\mathcal{C}$)といい，$\mathcal{S}(\mathcal{C})$ と書く．つまり，$\mathcal{S}(\mathcal{C})$ とは，$\mathcal{C}$ を含む最小の σ 集合体のことである．

ある σ 集合体 $\mathcal{S}$ の上で定義され，値を $[0,\infty]$ にもつような集合関数 μ が次の2つの性質を満たすときに，μ を**測度** (measure) という．

(1.1)　$\mu(\phi)=0$,

(1.2)　$\mathcal{S}$ に属し，互いに交わらない任意の可算個の集合 $\{E_j\}$ に対し，

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty}E_j\right)=\sum_{j=1}^{\infty}\mu(E_j).$$

このとき，性質 (1.2) から，測度 μ は単調増大な集合関数であることがわかる．つまり，$E, E'\in\mathcal{S}$，$E\subset E'$ ならば，$\mu(E)\leq\mu(E')$ が成り立つのである．

定理 1.1 (測度の連続性)

σ 集合体 $\mathcal{S}$ の上の任意の測度 μ は，次の性質を満たす．

(a)　$\mathcal{S}$ に属する単調増大な集合列 $E_1\subset E_2\subset\cdots$ に対し，

$$\mu(\lim_{j\to\infty}E_j)=\lim_{j\to\infty}\mu(E_j).$$

(b)　$\mathcal{S}$ に属する単調減少な集合列 $F_1\supset F_2\supset\cdots$ に対し，もし $\mu(F_1)<\infty$ ならば

$$\mu(\lim_{j\to\infty}F_j)=\lim_{j\to\infty}\mu(F_j).$$

(c)　$\mathcal{S}$ に属する任意の集合列 $\{F_j\}$ に対し，

$$\mu(\underline{\lim}_{j\to\infty}F_j)\leq\underline{\lim}_{j\to\infty}\mu(F_j).$$

証明 (a) $\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$ を互いに交わらない集合の無限和に書き直すと，$E_1 \cup \bigcup_{j=2}^{\infty}(E_j \backslash E_{j-1})$ となる．そこで，(1.2) を用いると，

$$\begin{aligned}\mu(\lim_{j\to\infty} E_j) &= \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) \\ &= \mu(E_1) + \sum_{2}^{\infty} \mu(E_j \backslash E_{j-1}) \\ &= \lim_{k\to\infty}\left[\mu(E_1) + \sum_{2}^{k} \mu(E_j \backslash E_{j-1})\right] \\ &= \lim_{k\to\infty} \mu\left(E_1 \cup \bigcup_{2}^{k}(E_j \backslash E_{j-1})\right) \\ &= \lim_{k\to\infty} \mu(E_k).\end{aligned}$$

(b) $E_j = F_1 \backslash F_j \in \mathcal{S}$ とおくと，$E_2 \subset E_3 \subset \cdots$ となり，(a) の結果を適用することができる．$\bigcap_j F_j = F_1 \backslash \bigcup_j E_j$ だから，

$$\begin{aligned}\mu(\lim_{j\to\infty} F_j) &= \mu\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} F_j\right) \\ &= \mu(F_1) - \mu(\bigcup_j E_j) \\ &= \mu(F_1) - \lim_{j\to\infty} \mu(E_j) \\ &= \lim_{j\to\infty} (\mu(F_1) - \mu(E_j)) \\ &= \lim_{j\to\infty} \mu(F_j).\end{aligned}$$

(c) $E_k = \bigcap_{j=k}^{\infty} F_j \in \mathcal{S}$ とおくと，明らかに $E_1 \subset E_2 \subset \cdots$ となる．そこで，(a) の結果を用いて，

$$\mu(\varliminf_{j\to\infty} F_j) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \lim_{k\to\infty} \mu(E_k) \leq \varliminf_{j\to\infty} \mu(F_j).$$ □

次に，測度の条件 (1.2) を弱めることによって，外測度の概念を導入しよう．正確にいえば，集合 X 上の**外測度** ν (outer measure) とは，X の**すべて**の部分集合に対して定義され，値を $[0,\infty]$ にもつような集合関数で，次の3つの性質を満たすものをいう．

(1.3) $\nu(\phi) = 0$,

(1.4) $A \subset A'$ ならば，$\nu(A) \leq \nu(A')$,

(1.5) X の任意の部分集合の列 $\{A_j\}$ に対して，

$$\nu\left(\bigcup_1^\infty A_j\right) \leq \sum_1^\infty \nu(A_j).$$

この外測度 ν の有用な点は，ある σ 集合体を選ぶことができて，その上では ν が測度の性質を満たしているようにできるということにある．しかも，多くの場合，そのようにして選んだ σ 集合体は十分に大きな集合族になっているのである．以下に，このことを説明しよう．

X の部分集合 E が**外測度 ν に関して可測**(measurable with respect to the outer measure ν)，あるいは単に **ν 可測**(ν–measurable)であるとは，任意の $A \subset X$ に対して，

$$\nu(A) = \nu(A \cap E) + \nu(A \setminus E) \tag{1.6}$$

が成り立つときにいう．このとき，集合 E が ν 可測であることを示すには，次の不等式

$$\nu(A) \geq \nu(A \cap E) + \nu(A \setminus E) \tag{1.7}$$

が成り立つことを示すだけで十分である．なぜなら，逆向きの不等式は外測度の性質 (1.5) から容易に従うからである．また，$\nu(E)=0$ を満たす集合 E は明らかに ν 可測となる．

定理 1.2

ν を任意の外測度とする．このとき，X の部分集合で ν 可測であるものの全体 $\mathscr{M}$ は σ 集合体をなす．さらに，ν を $\mathscr{M}$ 上に制限したものは $\mathscr{M}$ 上の測度になる．

証明　明らかに，$\phi \in \mathscr{M}$ だから，$\mathscr{M}$ は空ではない．また，(1.6) から，$E \in \mathscr{M}$ と $X \setminus E \in \mathscr{M}$ は同値であることがわかる．ゆえに，$\mathscr{M}$ は補集合をとる操作に関して閉じていることがわかった．

次に，$\mathscr{M}$ が可算個の和集合をとる操作に関しても閉じていることを示そう．$E_1, E_2, \cdots \in \mathscr{M}$ とし，A を任意の部分集合とする．このとき，$E_1, E_2, \cdots$ に (1.6)を適用して，

$$\begin{aligned}\nu(A) &= \nu(A \cap E_1) + \nu(A \setminus E_1) \\ &= \nu(A \cap E_1) + \nu((A \setminus E_1) \cap E_2) + \nu(A \setminus E_1 \setminus E_2) \\ &= \cdots\cdots\cdots\cdots \\ &= \sum_{j=1}^{k} \nu\left(\left(A \setminus \bigcup_{i=1}^{j-1} E_i\right) \cap E_j\right) + \nu\left(A \setminus \bigcup_{j=1}^{k} E_j\right).\end{aligned}$$

ゆえに，任意の $k \geq 1$ に対し，

$$\nu(A) \geq \sum_{j=1}^{k} \nu\left(\left(A \setminus \bigcup_{i=1}^{j-1} E_i\right) \cap E_j\right) + \nu\left(A \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right),$$

したがって，

$$\nu(A) \geq \sum_{j=1}^{\infty} \nu\left(\left(A \setminus \bigcup_{i=1}^{j-1} E_i\right) \cap E_j\right) + \nu\left(A \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) \tag{1.8}$$

を得る．他方，

$$A \cap \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} \left(\left(A \setminus \bigcup_{i=1}^{j-1} E_i\right) \cap E_j\right)$$

であるから，(1.5) と (1.8) を用いて

$$\begin{aligned} \nu(A) &\leq \nu\left(A \cap \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) + \nu\left(A \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) \\ &\leq \sum_{j=1}^{\infty} \nu\left(\left(A \setminus \bigcup_{i=1}^{j-1} E_i\right) \cap E_j\right) + \nu\left(A \setminus \bigcap_{j=1}^{\infty} E_j\right) \leq \nu(A). \end{aligned}$$

ゆえに，$\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \in \mathcal{M}$ が成り立ち，したがって，$\mathcal{M}$ は σ 集合体となることがわかった．

さて，$E_1, E_2, \cdots$ を $\mathcal{M}$ の**互いに交わらない**集合列としよう．$A = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$ とおいて，(1.8) を用いれば，

$$\nu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) \geq \sum_{j=1}^{\infty} \nu(E_j).$$

一方で，(1.5) から逆向きの不等式が従い，ゆえに，ν は $\mathcal{M}$ 上の測度になっている． □

外測度 ν が**正則**(regular)であるとは，任意の部分集合 A に対し，$\nu(A) = \nu(E)$ を満たす ν 可測な集合 E で，A を含むものが存在するときにいう．

補題 1.3

ν を正則な外測度とし，$\{A_j\}$ を任意の単調増大列とする．このとき，

$$\lim_{j \to \infty} \nu(A_j) = \nu(\lim_{j \to \infty} A_j).$$

証明　各 j に対して，$\nu(E_j) = \nu(A_j)$ を満たす ν 可測集合 $E_j \supset A_j$ が存在する．そこで，(1.4) と定理 1.1(c) を用いて，

$$\nu(\lim A_j) = \nu(\underline{\lim}\, A_j) \leq \nu(\underline{\lim}\, E_j) \leq \underline{\lim}\, \nu(E_j) = \lim \nu(A_j).$$

逆の不等式は (1.4) から明らかである． □

さて，一般の距離空間 (X,d) を考えよう．(単に，X を n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$，d を通常の距離関数と考えて読み進んで差し支えない．)　このとき，X の閉集合全体によって生成された σ 集合体に属する集合を**ボレル集合**(Borel sets)という．すると，開集合は(閉集合の補集合だから)ボレル集合であり，**F_σ 集合**(閉集合の可算和として表わされる集合)も，**G_δ 集合**(可算個の開集合の共通部分として表わされる集合)も，ボレル集合になる．

X 上の外測度 ν が**距離外測度**(metric outer measure)であるとは，

$$d(E,F)=\inf\{d(x,y): x\in E, y\in F\}>0$$

を満たす任意の部分集合 $E,F\subset X$ に対し(このとき，E と F は**強分離**(positively separated)しているという)，

$$\nu(E\cup F)=\nu(E)+\nu(F) \tag{1.9}$$

が成り立つときにいう．さて，ν が距離外測度であれば，ボレル集合は ν 可測であることを以下に示そう．その証明は，次の **Carathéodory の補題**に基づいている．

補題 1.4

ν を (X,d) 上の距離外測度とする．$\{A_j\}_1^\infty$ を X の単調増大列とし，$A=\lim_{j\to\infty} A_j$ とおく．このとき，各 j に対し $d(A_j, A\backslash A_{j+1})>0$ が満たされていれば，$\nu(A)=\lim_{j\to\infty}\nu(A_j)$ が成り立つ．

証明　次の不等式を示せば十分である．

$$\nu(A)\leq\lim_{j\to\infty}\nu(A_j). \tag{1.10}$$

なぜなら，逆向きの不等式は (1.4) から従うからである．まず，$B_1=A_1$ とおき，各 $j\geq 2$ に対して $B_j=A_j\backslash A_{j-1}$ とおく．このとき，もし $j+2\leq i$ であれば，$B_j\subset A_j$ かつ $B_i\subset A\backslash A_{i-1}\subset A\backslash A_{j+1}$ が成り立つから，B_i と B_j は強分離していることがわかる．そこで，(1.9) を $m-1$ 回適用すれば，

$$\nu\left(\bigcup_{k=1}^m B_{2k-1}\right)=\sum_{k=1}^m \nu(B_{2k-1}),$$

$$\nu\left(\bigcup_{k=1}^m B_{2k}\right)=\sum_{k=1}^m \nu(B_{2k}).$$

このとき，もしどちらかの値が $m\to\infty$ のときに発散するならば，$\bigcup_{k=1}^m B_{2k-1}$，$\bigcup_{k=1}^m B_{2k}$ ともに A_{2m} に含まれているから $\lim_{j\to\infty}\nu(A_j)=\infty$ となり，明らかに補題

が成り立つことがわかる．したがって，両式ともに$m\to\infty$のときに有限値に収束する場合を考えれば十分である．すると，

$$\begin{aligned}\nu(A)=\nu\Bigl(\bigcup_{j=1}^{\infty}A_j\Bigr)&=\nu\Bigl(A_j\cup\bigcup_{k=j+1}^{\infty}B_k\Bigr)\\&\leq\nu(A_j)+\sum_{k=j+1}^{\infty}\nu(B_k)\\&\leq\lim_{i\to\infty}\nu(A_i)+\sum_{k=j+1}^{\infty}\nu(B_k).\end{aligned}$$

右辺第2項は$j\to\infty$のときに0に収束することから，(1.10) が成り立つ．□

定理 1.5

νを(X,d)上の距離外測度とする．このとき，Xの任意のボレル集合はν可測である．

証明　ボレル集合族はXの閉集合全体を含む最小のσ集合体であり，またν可測集合の全体は1つのσ集合体をなすことから，Eを任意の閉集合，Aを任意の部分集合として，(1.7) 式が成り立つことを示せばよい．

そこで，集合Eからの距離が$1/j$以上となるような$A\backslash E$の点全体をA_jとしよう．すると，$d(A\cap E, A_j)\geq 1/j$だから，

$$\nu(A\cap E)+\nu(A_j)=\nu((A\cap E)\cup A_j)\leq\nu(A) \tag{1.11}$$

が各jに対して成り立つ．このとき列$\{A_j\}$は単調増大列であり，またEは閉集合だから，$A\backslash E=\bigcup_{j=1}^{\infty}A_j$が成り立っている．したがって，$d(A_j, A\backslash E\backslash A_{j+1})>0$が各$j$に対して成立すれば，補題1.4を用いて$\nu(A\backslash E)=\lim_{j\to\infty}\nu(A_j)$．ゆえに，(1.11) から (1.7) 式の成り立つことがわかる．ところが，任意の点$x\in A\backslash E\backslash A_{j+1}$に対し，$d(x,z)<1/(j+1)$なる点$z\in E$が存在することから，任意の$y\in A_j$に対し，$d(x,y)\geq d(y,z)-d(x,z)>1/j-1/(j+1)>0$. ゆえに，$d(A_j, A\backslash E\backslash A_{j+1})>0$が成り立ち，これで証明が完了した．□

さて，ボレル集合の定義の仕方とは異なり，閉集合の和および交わりを用いて，直接に定義される重要な集合族がある．すなわち，距離空間(X,d)の**スリン集合**(Souslin sets)とは

$$E=\bigcup_{i_1i_2\cdots}\bigcap_{k=1}^{\infty}E_{i_1i_2\cdots i_k}$$

によって定義される集合のことで，各有限自然数列 $\{i_1, i_2, \cdots, i_k\}$ に対し，$E_{i_1 i_2 \cdots i_k}$ は閉集合とする．ただし，集合 E は可算個の閉集合から作られているわけだけれども，和の方は自然数の無限列全体(連続濃度)にわたっていることに注意しておく．(つまり，各閉集合は定義式の中で無限回出現しているのである．)

任意のボレル集合はススリン集合であり，考えている距離空間が完備であれば，ススリン集合の任意の連続像もまたススリン集合になる．さらに，距離空間 (X, d) 上の外測度 ν に対して，すべての閉集合が ν 可測であるならば，任意のススリン集合も ν 可測になる．したがって，定理1.5より，もし ν が (X, d) 上の距離外測度であれば，ススリン集合は ν 可測である．ススリン集合に関する参考文献としては，測度論的立場から，Rogers(1970) に詳しい．さらに詳しくは Rogers, et al. (1980) を参照されたい．

1.2　ハウスドルフ測度

以降，考える空間は n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ とする．ただし，多くのことがもっと一般の距離空間においても有効であることを強調しておきたい．

さて，$\mathbb{R}^n$ の空でない部分集合 U に対し，U の**直径**(diameter)を $|U| = \sup\{|x-y| : x, y \in U\}$ と定める．このとき，$E \subset \bigcup_i U_i$ かつ $0 < |U_i| \leq \delta$ が各 i について成り立っているならば，$\{U_i\}$ は E の **δ 被覆**(δ-cover)であるという．

E を $\mathbb{R}^n$ の部分集合とし，s を負でない実数とする．$\delta > 0$ に対し，

$$\mathcal{H}^s_\delta(E) = \inf \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s \tag{1.12}$$

と定めよう．ただし，下限はあらゆる E の可算 δ 被覆 $\{U_i\}$ にわたるものとする．容易に確かめられるように，$\mathcal{H}^s_\delta$ は $\mathbb{R}^n$ 上の外測度である．

さて，$\delta \to 0$ を考えることによって，E の**ハウスドルフ s 次元外測度**(Hausdorff s-dimensional outer measure)

$$\mathcal{H}^s(E) = \lim_{\delta \to 0} \mathcal{H}^s_\delta(E) = \sup_{\delta > 0} \mathcal{H}^s_\delta(E) \tag{1.13}$$

を定義しよう．δ が減少していくとき $\mathcal{H}^s_\delta$ は単調に増加するから，上の極限は無限大もこめて存在することがわかる．$\mathcal{H}^s$ が外測度になることは容易に確か

めることができるが，実は，距離外測度になっているのである．なぜなら，いま強分離している2つの集合EとF間の距離よりも小さいδに対して$E\cup F$のδ被覆を考えると，EとFの両方に交わっているものは存在しない．したがって，

$$\mathcal{H}^s_\delta(E\cup F)=\mathcal{H}^s_\delta(E)+\mathcal{H}^s_\delta(F)$$

が成り立ち，ゆえに$\mathcal{H}^s$に対しても同じ等式が成り立つからである．したがって，定理1.5より，$\mathcal{H}^s$可測集合からなるσ集合体はボレル集合を含み，さらにススリン集合も含んでいることがわかる．$\mathcal{H}^s$を，このσ集合体上に制限したものを**ハウスドルフs次元測度**(Hausdorff s-dimensional measure)という．

さて，(1.12)における下限はEの任意のδ被覆にわたるものであったが，もし凸集合だけからなるδ被覆に制限して下限をとったとしても，実は全く同じハウスドルフ測度を定めることがわかる．なぜなら，任意の集合は，それと同じ直径の凸集合に必ず含まれているからである．同様にして，開集合または閉集合だけからなるδ被覆を考えた方が都合のよいことがあるが，いずれの場合も，($\mathcal{H}^s_\delta$の方は違う値になるかもしれないが)上述したのと全く同じハウスドルフ測度を定めるのである．詳しくはDavies(1956)を参照のこと．(ところで，もし球だけからなるδ被覆に制限して下限をとった場合は，ハウスドルフ測度とは異なる測度が得られることが知られている．これについては，両者を比較研究したBesicovitch(1928*a*，第3章)を参照のこと．)

任意に固定した集合Eに対し，sが0から∞まで動くとき，$\mathcal{H}^s(E)$はsの関数として単調減少であることがわかる．実際，$s<t$に対して，

$$\mathcal{H}^s_\delta(E)\geq\delta^{s-t}\mathcal{H}^t_\delta(E)$$

が成り立ち，もし$\mathcal{H}^t(E)$が正であれば，$\mathcal{H}^s(E)$は無限大になることがわかる．したがって，次の性質を満たす値(これをEの**ハウスドルフ次元**(Hausdorff dimension)といい，$\dim E$と書く)が一意的に存在する．

$$\text{(1.14)}\qquad \begin{aligned}&0\leq s<\dim E\text{ に対し }\mathcal{H}^s(E)=\infty,\\&\text{かつ}\dim E<s<\infty\text{ に対し }\mathcal{H}^s(E)=0.\end{aligned}$$

さて，$\mathbb{R}^n$の単位立方体Cを考えよう．各辺をk等分してk^n個の小立方体に細分すれば，$\delta\geq k^{-1}n^{\frac{1}{2}}$に対して$\mathcal{H}^n_\delta(C)\leq k^n(k^{-1}n^{\frac{1}{2}})^n\leq n^{\frac{1}{2}n}$が成り立ち，$\mathcal{H}^n(C)<\infty$となることがわかる．ゆえに，$s>n$に対して$\mathcal{H}^s(C)=0$であり，

$\mathbb{R}^n$ は単位立方体の可算和で表わされるから，$\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^n)=0$ を得る．このことから，任意の $E\subset\mathbb{R}^n$ に対して $0\leq\dim E\leq n$ が成り立つ．また，$E\subset E'$ ならば，$\dim E\leq\dim E'$ となることも明らかである．

$\mathcal{H}^s$ 可測集合 $E\subset\mathbb{R}^n$ で，$0<\mathcal{H}^s(E)<\infty$ を満たすものを **s 集合**という．特に $s=1$ のときは**線形可測集合**(linearly measurable set)ということもある．明らかに，s 集合のハウスドルフ次元は s である．しかし，s 集合は，ハウスドルフ次元が s の一般の可測集合にはない，特別な性質をもっているということを理解しておくことは重要である．実際，Besicovitch(1942) は，任意の集合が，それと同じハウスドルフ次元をもつ，互いに交わらない集合の連続濃度無限和によって表わされることを示した．本書の大部分は，この s 集合の幾何学的性質の研究に充てられているのである．

さて，正値で単調増大な右連続関数 h に対して，(1.12)式の $|U_i|^s$ を $h(|U_i|)$ で置き換えることによって，ハウスドルフ測度を一般化することができる．以下に述べる多くの結果を，このように一般化されたハウスドルフ測度に対して一般化することが可能である．このとき，関数 h は集合の測り方を規定しているわけであるから，集合 E のハウスドルフ次元を，E を0に測るか，あるいは ∞ に測るかという関数の分割として理解することができよう．詳しくは Rogers(1970) を参照のこと．また，h を集合関数として，$|U_i|^s$ を $h(U_i)$ で置き換えることによっても，一般化を計ることが可能である．これについては Davies(1969) および Davies & Samuels(1974) を参照のこと．

さて次に，ハウスドルフ測度 $\mathcal{H}^s$ は正則であること，さらに，任意の s 集合は閉集合によって内側から近似できることを示そう．この証明は Besicovitch (1938)によって与えられたのであるが，同時に彼は，次の定理 1.6(b)における有限性の条件の必要性をも示した(1954)．

定理 1.6

(a)　$\mathbb{R}^n$ の任意の部分集合 E に対し，E を含む G_δ 集合 G で，$\mathcal{H}^s(G)=\mathcal{H}^s(E)$ を満たすものが存在する．特に，$\mathcal{H}^s$ は正則な外測度である．

(b)　有限の $\mathcal{H}^s$ 測度をもつ任意の $\mathcal{H}^s$ 可測集合は，それと同じ測度をもつ F_σ 集合を含んでいる．したがって，いくらでも近い測度をもつ閉集合を含んでいる．

証明　(a)　$\mathcal{H}^s(E)=\infty$ のときは，開集合である $\mathbb{R}^n$ を考えればよい．そこで，$\mathcal{H}^s(E)<\infty$ としよう．各 $i=1,2,\cdots$ に対して，

$$\sum_{j=1}^{\infty}|U_{ij}|^s<\mathcal{H}^s_{1/i}(E)+1/i$$

を満たす，開集合からなる E の $2/i$ 被覆 $\{U_{ij}\}_j$ が存在する．そこで，$G=\bigcap_{i=1}^{\infty}\bigcup_{j=1}^{\infty}U_{ij}$ とおくと，これは明らかに G_δ 集合であり，$E\subset G$ が成り立つ．さて，$\{U_{ij}\}_j$ は G の $2/i$ 被覆でもあるから，$\mathcal{H}^s_{2/i}(G)\leq\mathcal{H}^s_{1/i}(E)+1/i$ が成り立ち，$i\to\infty$ を考えることによって，$\mathcal{H}^s(G)=\mathcal{H}^s(E)$ を得る．もちろん，G_δ 集合は $\mathcal{H}^s$ 可測であるから，$\mathcal{H}^s$ は正則な外測度であることがわかる．

(b)　E を $\mathcal{H}^s(E)<\infty$ なる $\mathcal{H}^s$ 可測集合とする．(a) より，E を含む開集合列 $O_1,O_2,\cdots$ が存在して，$\mathcal{H}^s(\bigcap_{i=1}^{\infty}O_i\backslash E)=\mathcal{H}^s(\bigcap_{i=1}^{\infty}O_i)-\mathcal{H}^s(E)=0$ を満たすようにできる．さて，$\mathbb{R}^n$ の任意の開部分集合は F_σ 集合であるから，各 i に対して $O_i=\bigcup_{j=1}^{\infty}F_{ij}$ とおくことができる．ただし，$\{F_{ij}\}_j$ は単調増大な閉集合列である．すると，$\mathcal{H}^s$ の連続性から，

$$\lim_{j\to\infty}\mathcal{H}^s(E\cap F_{ij})=\mathcal{H}^s(E\cap O_i)=\mathcal{H}^s(E).$$

したがって，任意の $\varepsilon>0$ に対し，

$$\mathcal{H}^s(E\backslash F_{ij_i})<2^{-i}\varepsilon$$

が各 $i=1,2,\cdots$ に対して成り立つように，自然数 j_i を選ぶことができる．そこで，$F=\bigcap_{i=1}^{\infty}F_{ij_i}$ なる閉集合を考えると，

$$\mathcal{H}^s(F)\geq\mathcal{H}^s(E\cap F)\geq\mathcal{H}^s(E)-\sum_{i=1}^{\infty}\mathcal{H}^s(E\backslash F_{ij_i})>\mathcal{H}^s(E)-\varepsilon.$$

ところで，$F\subset\bigcap_{i=1}^{\infty}O_i$ であるから，$\mathcal{H}^s(F\backslash E)\leq\mathcal{H}^s(\bigcap_{i=1}^{\infty}O_i\backslash E)=0$ が成り立ち，再び (a) により，$F\backslash E$ を含む G_δ 集合 G で，$\mathcal{H}^s(G)=0$ なるものが存在する．こうして，$F\backslash G$ は E に含まれる F_σ 集合であり，

$$\mathcal{H}^s(F\backslash G)\geq\mathcal{H}^s(F)-\mathcal{H}^s(G)>\mathcal{H}^s(E)-\varepsilon$$

が成り立つ．そこで，各 $\varepsilon=\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{4},\cdots$ に対して，そのような F_σ 集合の可算和を考えれば，これが，E に含まれ，かつ E と同じ測度をもった F_σ 集合であるということがわかる．　□

次の補題は，十分に小さい集合からなる1つの被覆を用いて，ハウスドルフ測度の上からの評価を与えるものである．

補題 1.7

E を $\mathcal{H}^s(E)<\infty$ なる $\mathcal{H}^s$ 可測集合とする．このとき，任意の $\varepsilon>0$ に対して E と ε のみに依存する $\rho>0$ が存在し，$0<|U_i|\leq\rho$ を満たす任意のボレル集合列 $\{U_i\}_{i=1}^\infty$ に対して，

$$\mathcal{H}^s(E\cap\bigcup_i U_i)<\sum_i |U_i|^s+\varepsilon$$

が成り立つ．

証明　$\mathcal{H}^s$ は $\mathcal{H}^s_\delta$ の $\delta\to0$ のときの極限であるから，E の任意の ρ 被覆 $\{W_i\}$ に対して，

$$\mathcal{H}^s(E)<\sum |W_i|^s+\frac{1}{2}\varepsilon \tag{1.15}$$

が成り立つように ρ を選ぶことができる．次に，任意に与えられた $0<|U_i|\leq\rho$ なるボレル集合列 $\{U_i\}$ に対し，

$$\mathcal{H}^s\left(E\backslash\bigcup_i U_i\right)+\frac{1}{2}\varepsilon>\sum |V_i|^s$$

が成り立つように $E\backslash\bigcup_i U_i$ の ρ 被覆 $\{V_i\}$ を見出すことができる．すると $\{U_i\}\cup\{V_i\}$ は，明らかに E の ρ 被覆になることから，(1.15) より，

$$\mathcal{H}^s(E)<\sum |U_i|^s+\sum |V_i|^s+\frac{1}{2}\varepsilon.$$

したがって，

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^s(E\cap\bigcup_i U_i)&=\mathcal{H}^s(E)-\mathcal{H}^s(E\backslash\bigcup_i U_i)\\&<\sum |U_i|^s+\sum |V_i|^s+\frac{1}{2}\varepsilon-\sum |V_i|^s+\frac{1}{2}\varepsilon\\&=\sum |U_i|^s+\varepsilon.\end{aligned}$$

□

この節の最後として，一様リプシッツ写像に関連した簡単な補題を示そう．

補題 1.8

写像 ψ: $E\to F$ は全射であるとし，ある正の定数 c が存在して，

$$|\psi(x)-\psi(y)|\leq c|x-y|$$

が任意の $x, y\in E$ に対して成り立っているものとする．このとき，$\mathcal{H}^s(F)\leq c^s\mathcal{H}^s(E)$ が成り立つ．

証明 $\{U_i\}$ を E の任意の δ 被覆とすると，各 i に対して，$|\psi(U_i\cap E)|\leq c|U_i|$．すなわち，$\{\psi(U_i\cap E)\}$ は F の $c\delta$ 被覆であり，$\sum_i |\psi(U_i\cap E)|^s\leq c^s\sum_i |U_i|^s$ が成り立つ．したがって，$\mathcal{H}^s_{c\delta}(F)\leq c^s\mathcal{H}^s_\delta(E)$ を得る．$\delta\to 0$ とすることにより補題の成り立つことがわかる． □

1.3 被覆定理

Vitali の被覆定理は，幾何学的測度論において最もよく用いられる定理である．Vitali の定理というのは，ある与えられた集合 E を被覆している十分に大きな集合族の中から，E のほとんどの点を被覆し，かつ**互いに交わらない**ような部分被覆を選び出すことができるということを主張するものである．

Vitali の定理に内在している基本原理を明瞭に示している次の補題を，まず示しておこう．

補題 1.9

$\mathbb{R}^n$ のある有界部分集合に含まれている開球または閉球からなる任意の集合族を $\mathcal{C}$ とする．このとき，互いに交わらない，有限または可算無限個の $\mathcal{C}$ の部分列 $\{B_i\}$ を，次の性質が成り立つように選び出すことができる．すなわち，各 i に対して，B_i の中心を原点にして，5 倍に相似拡大したものを B_i' とするとき，

$$\bigcup_{B\in\mathcal{C}} B\subset\bigcup_i B_i' \tag{1.16}$$

が成り立ち，さらに任意の $i\neq j$ に対して，$B_i'\not\subset B_j'$ が成り立つようにできる．

証明 帰納的に部分列 $\{B_i\}$ を定めよう．まず，B_1 としては，$d_0=\sup\{|B|:B\in\mathcal{C}\}$ とおくとき，$|B_1|\geq\dfrac{1}{2}d_0$ なるものを $\mathcal{C}$ から選ぶ．次に，$B_1,\cdots,B_m$ まで選ばれているとしよう．$d_m=\sup\{|B|:B\in\mathcal{C}$，$B$ は $\bigcup_1^m B_i$ と交わらない$\}$ とおくとき，もし $d_m=0$ ならば，これで選出は終了である（部分列は有限）．もし $d_m>0$ ならば，B_{m+1} として，$|B_{m+1}|\geq\dfrac{1}{2}d_m$ を満たし $\bigcup_1^m B_i$ と交わらないものを $\mathcal{C}$ から選ぶものとする．明らかに，こうして選出した部分列は互いに交わらない集合列であるが，このとき性質(1.16)をも満たしていることを以下に示そう．いま任意の $B\in\mathcal{C}$ を考える．このとき，必ず何らかの i が存在し

て，B と B_i は交わっていなければならないことがわかる．なぜなら，まず $\{B_i\}$ が有限列であれば自明であるから，可算無限列の場合を考えれば十分である．いま，B と $\bigcup_1^m B_i$ が交わっていないとすれば，B_{m+1} の定め方から，$2|B_{m+1}|\geq d_m \geq |B|$．ところで，体積を考えることにより $\sum |B_i|^n < \infty$ であるから，$i\to\infty$ のとき，$|B_i|\to 0$ でなければならず，こうして B は何らかの B_i と交わらねばならないのである．さて，初めて B と交わるものを B_m とすれば，$2|B_m|\geq|B|$ であるから，明らかに $B\subset B'_m$ が成り立ち，こうして (1.16) を得るのである．ところで，各 i に対して，$B'_i\subset B'_j$ を満たす $i\neq j$ は存在したとしても高々有限個であることが容易にわかる．したがって，そのような j が存在すれば，先ほど選出した部分列から B_i を除く操作を次々と行なうことによって，結局，(1.16)を満たし，かつ，任意の $i\neq j$ に対し $B'_i\not\subset B'_j$ が成り立つような部分列を構成することができる．　□

集合族 $\mathcal{V}$ が，与えられた集合 E に関する**ヴィターリ族** (Vitali class) であるとは，任意の $x\in E$ と任意の $\delta>0$ に対して，$x\in U$ かつ $0<|U|\leq\delta$ を満たす $U\in\mathcal{V}$ が常に存在するときにいう．

定理 1.10 (Vitaliの被覆定理)

(a)　E を $\mathbb{R}^n$ の $\mathcal{H}^s$ 可測集合とし，$\mathcal{V}$ を集合 E に関する，閉集合からなるヴィターリ族とする．このとき，$\sum|U_i|^s=\infty$ または $\mathcal{H}^s(E\backslash\bigcup_i U_i)=0$ が成り立つように，互いに交わらない有限または可算無限個からなる部分列 $\{U_i\}$ を $\mathcal{V}$ から選び出すことができる．

(b)　さらに，$\mathcal{H}^s(E)<\infty$ であれば，任意の $\varepsilon>0$ に対して，

$$\mathcal{H}^s(E)\leq\sum_i |U_i|^s+\varepsilon$$

が成り立つように部分列を選び出すことができる．

証明　(a)　任意に $\rho>0$ を固定したとき，すべての $U\in\mathcal{V}$ が $|U|\leq\rho$ を満たしていると仮定しても一般性を失わない．部分列 $\{U_i\}$ を帰納的に定めよう．まず，U_1 を全く任意に $\mathcal{V}$ から選ぶ．次に，$U_1,\cdots,U_m$ まで選ばれているとしよう．どんな $U_1,\cdots,U_m$ とも交わらない $\mathcal{V}$ の元 U の中での $|U|$ の上限を d_m とおく．もし $d_m=0$ であれば，$E\subset\bigcup_1^m U_i$ が成り立ち，明らかに(a)が従

う．これで選出は終了である(部分列は有限)．もし $d_m>0$ であれば，U_{m+1} として，$\bigcup_1^m U_i$ と交わらない $\mathcal{V}$ の元の中から $|U_{m+1}|\geq\frac{1}{2}d_m$ を満たすものを選出するものとする．

さて，こうして選出した部分列が無限列となる場合を考えれば十分である．$\sum|U_i|^s<\infty$ であると仮定しよう．各 i に対して，U_i と同じ中心をもち，半径が $3|U_i|$ の閉球を B_i とする．まず，すべての $k>1$ に対して，

$$E\setminus\bigcup_1^k U_i\subset\bigcup_{k+1}^\infty B_i \tag{1.17}$$

が成り立つことを示そう．なぜなら，任意の $x\in E\setminus\bigcup_1^k U_i$ に対して，$x\in U$ を満たし，どんな $U_1,\cdots,U_k$ とも交わらない $U\in\mathcal{V}$ が存在する．仮定から，$i\to\infty$ のとき $|U_i|\to 0$ となることから，何らかの m があって $|U|>2|U_m|$ が成り立つ．このとき，$\{U_i\}$ の選出の方法から容易にわかるように，U と交わる何らかの U_i，$k<i<m$，が存在して，$|U|\leq 2|U_i|$ が成り立たねばならない．ゆえに，$U\subset B_i$ が従い，(1.17) が成り立つのである．そうすると，任意の $\delta>0$ に対して，$|B_i|\leq\delta$ がすべての $i>k$ に対して成り立つように，k を十分大きく選んでおけば，

$$\mathcal{H}_\delta^s\left(E\setminus\bigcup_1^\infty U_i\right)\leq\mathcal{H}_\delta^s\left(E\setminus\bigcup_1^k U_i\right)\leq\sum_{k+1}^\infty|B_i|^s=6^s\sum_{k+1}^\infty|U_i|^s$$

が成り立つ．右辺は k さえ大きく選べば，いくらでも小さくなることから，すべての $\delta>0$ に対して $\mathcal{H}_\delta^s(E\setminus\bigcup_1^\infty U_i)=0$ が成り立つことがわかる．ゆえに，$\mathcal{H}^s(E\setminus\bigcup_1^\infty U_i)=0$ であり，(a) が従うのである．

(b) さて，任意の $\varepsilon>0$ に対して，補題 1.7 に登場した ε と E のみに依存する正数 ρ を考えよう．もし $\sum|U_i|^s=\infty$ ならば (b) は自明であるから，$\sum|U_i|^s<\infty$ の場合を考える．このとき，(a) と補題 1.7 から，

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^s(E)&=\mathcal{H}^s(E\setminus\bigcup_i U_i)+\mathcal{H}^s(E\cap\bigcup_i U_i)\\&=0+\mathcal{H}^s(E\cap\bigcup_i U_i)\\&<\sum|U_i|^s+\varepsilon.\end{aligned}$$

□

被覆定理は，それ自体かなり広範囲にわたって研究されてきている．特に，幾何学的測度論におけるのと同様に，調和解析の分野においても重要な役割を演じるものである．de Guzmán (1975, 1981) には，かなり一般的な集合と測度が論じられており，参考文献も豊富である．被覆定理は Besicovitch (1945*a*,

1946, 1947)によっても研究されたが，この初めの論文では，本書の2.2節で扱われる密度への応用について述べている．

1.4　ルベーグ測度

$\mathbb{R}^n$ における通常の体積(もちろん，$\mathbb{R}^1$ では長さ，$\mathbb{R}^2$ では面積を意味する)の概念の拡張として，n 次元ルベーグ測度が得られる．

C を $\mathbb{R}^n$ における右半開区間，すなわち，

$$C=[a_1,b_1)\times[a_2,b_2)\times\cdots\times[a_n,b_n)$$

で表わされる集合とする．ただし，各 i について $a_i<b_i$ とする．もちろん，この C の体積は，

$$V(C)=(b_1-a_1)(b_2-a_2)\cdots(b_n-a_n)$$

によって定められる．さて，一般に，$\mathbb{R}^n$ の部分集合 E に対して，

$$\mathcal{L}^n(E)=\inf\sum_i V(C_i) \tag{1.18}$$

と定義しよう．ただし，右辺の下限は，E を被覆するすべての右半開区間列 $\{C_i\}$ にわたるものとする．容易にわかるように，$\mathcal{L}^n$ は $\mathbb{R}^n$ 上の外測度となり，**ルベーグ n 次元外測度**(Lebesgue n-dimensional outer measure)として知られているものである．特に，E が $\mathbb{R}^n$ の区間であれば，(1.18)の和を有限和で近似し，ついで各 C_i の面を含む平面によって E を細分割することによって，容易に $\mathcal{L}^n(E)=V(E)$ となることがわかる．さて，任意の右半開区間 C_i は，(1.18) の和を変えないで，より小さい右半開区間の和に分解することができる．したがって，任意に固定した $\delta>0$ に対して，δ 被覆となるようなすべての区間列 $\{C_i\}$ に制限して，(1.18) の下限をとったとしても，全く同じ値を与えることがわかる．ゆえに，$\mathcal{L}^n$ は $\mathbb{R}^n$ 上の距離外測度である．$\mathcal{L}^n$ の $\mathcal{L}^n$ 可測集合(あるいは**ルベーグ可測集合**(Lebesgue-measurable sets)ともいう．定理1.5からボレル集合を含んでいる)への制限を**ルベーグ n 次元測度**(Lebesgue n-dimensional measure)または**体積**(volume)という．

明らかに，$\mathbb{R}^1$ 上では $\mathcal{L}^1$ と $\mathcal{H}^1$ の定義は一致している．また $n>1$ の場合は予測されるように，$\mathbb{R}^n$ 上の $\mathcal{L}^n$ と $\mathcal{H}^n$ とは定数倍の違いしかないのである．

この事実を証明するために，ここでは，よく知られた「等直径不等式」と呼ばれる次の定理(つまり，与えられた直径をもつ集合の中で最大の体積をもつものは球である)を用いよう．この証明については，例えばEggleston(1958)を参照されたい．また，章末の練習問題1.6も参照のこと．

定理 1.11

与えられた直径dをもつ，$\mathbb{R}^n$の閉凸集合の中で最大のn次元体積をもつものは直径dの閉球であり，その体積は$\pi^{\frac{1}{2}n}\left(\frac{1}{2}d\right)^n\Big/\left(\frac{1}{2}n\right)!$である．

定理 1.12

$\mathbb{R}^n$の任意の部分集合Eに対して，$\mathcal{L}^n(E)=c_n\mathcal{H}^n(E)$，ただし$c_n=\pi^{\frac{1}{2}n}/2^n\left(\frac{1}{2}n\right)!$，が成り立つ．特に，$c_1=1, c_2=\pi/4$である．

証明　まず不等式$\mathcal{L}^n(E)\leq c_n\mathcal{H}^n(E)$を示そう．$\mathcal{H}^n(E)$が有限の場合を示せば十分である．任意の$\varepsilon>0$に対して，$\sum|U_i|^n<\mathcal{H}^n(E)+\varepsilon$を満たすような，閉凸集合からなる$E$の被覆$\{U_i\}$が存在する．すると定理1.11より，$\mathcal{L}^n(U_i)\leq c_n|U_i|^n$が成り立ち，$\mathcal{L}^n(E)\leq\sum\mathcal{L}^n(U_i)<c_n\mathcal{H}^n(E)+c_n\varepsilon$を得る．$\varepsilon$は任意であったから，これより求める不等式が従う．

次に逆の不等式を示そう．$\mathcal{L}^n(E)$が有限の場合を示せば十分である．任意の$\varepsilon>0$に対して，

$$\sum_i V(C_i)<\mathcal{L}^n(E)+\varepsilon \tag{1.19}$$

を満たすような，Eを被覆する右半開区間列$\{C_i\}$が存在する．さて，各C_iを少しふくらませることによって，$\{C_i\}$は(1.19)を満たす開集合列であるとして差し支えない．任意に$\delta>0$を固定しよう．各iに対して，C_iに含まれ直径がδ以下の閉球全体を考えれば，これがC_iに関するヴィターリ族になっていることがわかる．したがって，定理1.10(a)により，結局，$\mathcal{H}^n(C_i\backslash\bigcup_{j=1}^{\infty}B_{ij})=0$を満たすような，$C_i$に含まれ，直径が$\delta$以下の，互いに交わらない閉球列$\{B_{ij}\}_j$が存在する．したがって，特に，$\mathcal{H}^n_\delta(C_i\backslash\bigcup_{j=1}^{\infty}B_{ij})=0$を得る．一方，$\mathcal{L}^n$はボレル測度であるから，$\sum_{j=1}^{\infty}\mathcal{L}^n(B_{ij})=\mathcal{L}^n(\bigcup_{j=1}^{\infty}B_{ij})\leq\mathcal{L}^n(C_i)$．こうして，(1.19)を用いて，

$$\mathcal{H}^n_\delta(E)\leq\sum_{i=1}^{\infty}\mathcal{H}^n_\delta(C_i)\leq\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\mathcal{H}^n_\delta(B_{ij})+\sum_{i=1}^{\infty}\mathcal{H}^n_\delta\Bigl(C_i\backslash\bigcup_{j=1}^{\infty}B_{ij}\Bigr)$$

$$\leq \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}|B_{ij}|^n=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}c_n^{-1}\mathcal{L}^n(B_{ij})$$

$$\leq c_n^{-1}\sum_{i=1}^{\infty}\mathcal{L}^n(C_i)<c_n^{-1}\mathcal{L}^n(E)+c_n^{-1}\varepsilon.$$

ゆえに，$c_n\mathcal{H}_\delta^n(E)\leq\mathcal{L}^n(E)+\varepsilon$ を得る．ε と δ は任意であったから，$c_n\mathcal{H}^n(E)\leq\mathcal{L}^n(E)$ が従うのである． □

Lebesgue の測度論における古典的結果の1つに，次の密度定理がある．このような密度定理をハウスドルフ測度に対しても定式化しようという試みが，本書における大部分の研究の起源になっているのである．Lebesgue の密度定理は，Vitali の被覆定理を用いて証明することができる(練習問題1.5)が，次章の定理2.2の特別の場合でもある．

定理 1.13 (Lebesgue の密度定理)

中心 x，半径 $r>0$ の閉球を $B_r(x)$ とおく．また，E を $\mathbb{R}^n$ の $\mathcal{L}^n$ 可測集合とする．このとき，$\mathcal{L}^n$ 測度0の x の集合を除いて，次の極限値(これを点 x における E の**ルベーグ密度**(Lebesgue density)という)

$$\lim_{r\to 0}\frac{\mathcal{L}^n(E\cap B_r(x))}{\mathcal{L}^n(B_r(x))} \tag{1.20}$$

が存在し，$x\in E$ ならば1，$x\notin E$ ならば0である．

1.5　ハウスドルフ次元および測度の計算

一般に，与えられた集合のハウスドルフ次元を決定するのは容易ではないし，さらにそのハウスドルフ測度を決定したり評価したりするとなると，いっそう難しい問題になる．特に，ハウスドルフ次元および測度を下から評価するのが難しいのである．この節では，そのハウスドルフ次元および測度が決定できるような，いくつかの集合を紹介しよう．そのような例は，他にも本書の各所で見出せるはずである．本書では，もっぱら $\mathbb{R}^n$ 内の s 集合を研究していくわけであるが，以下に述べる例を通じて，そのような集合が比較的たくさん存在しているということがわかるであろう．

非整数のハウスドルフ次元をもつような数直線上の集合のうち，最もよく知られているのは**カントール集合**(Cantor set)である．これを以下に説明しよう．まず，閉集合列を，$E_0=[0,1], E_1=[0,1/3]\cup[2/3,1], E_2=[0,1/9]\cup[2/9,1/3]\cup[2/3,7/9]\cup[8/9,1]$，… などという具合に，つまり，$E_j$ の各閉区間のまん中に位置する 1/3 の長さの小開区間を取り除くことによって，E_{j+1}を定めていくのである(図 1.1 参照)．明らかに，E_j は長さ 3^{-j} の 2^j 個の閉区間

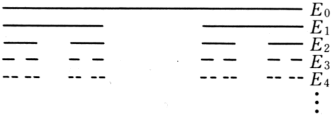


図 1.1

より成り立っている．そこで，$E=\bigcap_{j=0}^{\infty} E_j$ とおき，この完全集合(孤立点をもたない閉集合)のことをカントール集合というのである．(この構成における閉区間全体は**網**(net)としての性質をもっている．つまり，任意の 2 つの閉区間をとってきたときに，互いに交わっていないか，あるいは，片方が他方に含まれているかのいずれかが必ず成り立っているのである．この網の概念は，本書でたびたび登場するであろう．) カントール集合 E は，可算個の例外点を除いて，$[0,1]$ の数を 3 進展開したときに，数字 1 を含まないような数の全体と一致している．さて，この E のハウスドルフ次元および測度を計算してみよう．ここで用いる方法を，さらに複雑な集合に対して一般化することもできよう．

定理 1.14

カントール集合 E のハウスドルフ次元は $s=\log 2/\log 3=0.6309\cdots$ である．さらに，$\mathcal{H}^s(E)=1$ が成り立つ．

証明　明らかに，E は長さ 3^{-j} の 2^j 個の閉区間によって覆われている．したがって，s を定理で述べた値として，$\mathcal{H}^s_{3^{-j}}(E)\leq 2^j 3^{-sj}=2^j 2^{-j}=1$．ゆえに，$j\to\infty$ として，$\mathcal{H}^s(E)\leq 1$ を得る．

次に，逆向きの不等式を示そう．そのためには，E を被覆する任意の区間列 $\mathcal{I}$ に対して，

$$1\leq \sum_{I\in\mathcal{I}} |I|^s \tag{1.21}$$

が成り立つことを示せば十分である．さて，各Iを少しふくらませることによって，$\mathcal{I}$は開区間列であるとしてよい．さらに，Eはコンパクトであるから，Eを被覆するすべての有限開区間列$\mathcal{I}$に対して，(1.21) が成り立つことを示せば十分である．このとき，容易にわかるように，十分大きなjを選べば，E_jを構成する2^j個の各閉区間は必ず何らかの$I\in\mathcal{I}$に含まれているようにできる．さて，E_jの小閉区間を2つ以上含んでいるようなIを考えよう．そこで，それらの小閉区間にはさまれた区間のうち最大のものをKとする．こうして，Iに含まれるE_jの各小閉区間は，Kによって2つのグループに分けられる．各グループを含む最小の閉区間をそれぞれJ, J'としよう．すると，カントール集合の構成の仕方から，

$$|J|, |J'| \leq |K| \tag{1.22}$$

が成り立つことがわかる．こうして，$3^s=2$と関数t^sの凸性を用いて，

$$\begin{aligned}|I|^s &\geq (|J|+|K|+|J'|)^s\\ &\geq \left(\frac{3}{2}(|J|+|J'|)\right)^s = 2\left(\frac{1}{2}|J|+\frac{1}{2}|J'|\right)^s \geq |J|^s+|J'|^s\end{aligned}$$

を得る．すなわち，Iを2つの閉区間JとJ'で置き換えても，(1.21) の右辺の和を増加させないことがわかった．IがE_jの小閉区間を1つしか含まない場合は，明らかにそれで置き換えることができる．こうして，この操作を有限回繰り返すことによって，最終的に，(1.21) の右辺の和を増加させることなく，Eの被覆として，E_jを構成する小閉区間そのものに到達する．ところが，この被覆に対しては，明らかに (1.21) が成立している．したがって，任意の区間列$\mathcal{I}$に対しても，(1.21) が成立する．　□

カントール集合の構成における数$\dfrac{1}{3}$は，もちろん本質的ではない．すなわち，$E_0=[0,1]$とし，E_jを構成する各閉区間から，今度は全体の$1-2k$の長さの小開区間を取り除くことによってE_{j+1}を構成していくものとすれば，(1.22)式の代わりに$|J|, |J'| \leq |K|k/(1-2k)$が成り立ち，$s=\log 2/\log(1/k)$に対して$\mathcal{H}^s(\bigcap_1^\infty E_j)=1$を示すことができる．

同様の方法で，このような特異集合を高次元空間で構成することもできる．例えば，$\mathbb{R}^2$において，まずE_0を単位正方形とし，1辺がkの小正方形を四隅に配置したものをE_1とする．同様に，E_{j-1}を構成する各正方形に対して，

1辺がk^jの小正方形を四隅に配置することによってE_jを構成する（図1.2参照）. そうすると, 前と同様の方法によって, $s=\log 4/\log(1/k)$に対して, $\mathcal{H}^s(\bigcap_1^\infty E_j)$の値を上と下から正の値で評価することができる. したがって, これはs集合である. この測度の正確な値についてはこれ以上議論しないことにして, 次に, $\mathbb{R}^1$上においてカントール集合の構成を一般化しよう.

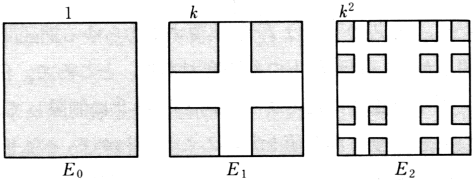


図 1.2

さて, 任意に固定した$0<s<1$に対して, ハウスドルフ次元がsとなるような集合を構成する. まずE_0を単位区間とし, 帰納的に$E_0\supset E_1\supset E_2\supset\cdots$を定めよう. ただし, 各$E_j$は有限個の閉区間からなり, E_jを構成する各閉区間Iに対して, $E_{j+1}\cap I$を以下のように定めることによってE_{j+1}を構成していくのである. すなわち, 自然数$m\geq 2$に対し(ただし, mはIに依存してよい), m個の閉区間$J_1, J_2, \cdots, J_m$を次のように定める. まず, それらの長さはすべて相等しく,

(1.23)
$$|J_i|^s=\frac{1}{m}|I|^s$$

を満たしているように, また, J_1とIの左端点がそれぞれ一致し, かつJ_mとIの右端点がそれぞれ一致しているように, $J_1, J_2, \cdots, J_m$を区間I上に等間隔に配置するものとする. すなわち, この間隔をdとおくと, 各$1\leq i\leq m$に対して,

(1.24)
$$m|J_i|+(m-1)d=|I|$$

が成り立っている. こうして, E_{j+1}は$E_{j+1}\cap I=\bigcup_1^m J_i$を満たすものとして定められるのである.

すると, 集合$E=\bigcap_{j=0}^\infty E_j$は, カントール集合と同じく, $[0,1]$内の疎な完全集合になっている. 次の結果は, 近く発表されるDaviesの論文に見出すことができよう.

定理 1.15

上述のように構成した集合 E に対して，$\mathcal{H}^s(E)=1$ が成り立つ．

証明　E の構成に登場した閉区間全体は網としての性質をもっていることがわかる．そこで簡単のために，そのような閉区間のことを**網区間**(net interval)と呼ぶことにしよう．さて，E の任意の部分集合 F に対して，

$$\mu(F)=\inf\sum_{I\in\mathcal{I}}|I|^s \tag{1.25}$$

と定める．ただし，右辺の下限は F を被覆するあらゆる網区間列 $\mathcal{I}$ にわたるものとする．明らかに，μ は E 上の外測度である．ところで，任意に固定した $\delta>0$ に対して，F の δ 被覆になるような網区間列 $\mathcal{I}$ に制限して，(1.25) の下限をとったとしても，全く同じ値を定めることがわかる．なぜなら，1つの網区間 I をそれに含まれるいくつかの小さい網区間で置き換えたにしても，(1.23) により，(1.25) の和を変えないからである．こうして，μ はボレル測度であることがわかった．

E を被覆する任意の網区間列 $\mathcal{I}$ に対して，$\sum_{I\in\mathcal{I}}|I|^s$ を下から評価しよう．このとき，各網区間は，明らかに，コンパクト集合 E に導かれた相対位相に関して開集合になるから，$\mathcal{I}$ は有限であると仮定しても一般性を失わない．また網としての性質から，$\mathcal{I}$ は互いに交わらない網区間の列であるとしてよい．さて，$\mathcal{I}$ に属する網区間の中で，最小の長さをもつ網区間 J を考えよう．J は E_j の成分であるとすれば，$J\subset I$ を満たす網区間 I が E_{j-1} に存在する．すると，$\mathcal{I}$ は E の被覆であるから，$E_j\cap I$ を構成する他のすべての網区間は $\mathcal{I}$ に属さねばならない．このとき，これらの小網区間を I によって置き換えるならば，(1.23) により，$\sum|I|^s$ の値は不変である．このような操作を有限回繰り返すことによって，$\sum|I|^s$ の値を変えることなく，最終的に $[0,1]$ ひとつだけからなる被覆に到達することがわかる．ゆえに，$\sum_{I\in\mathcal{I}}|I|^s\geq|[0,1]|^s=1$．したがって，$\mu(E)=1$ を得る．

全く同じ方法によって，任意の網区間 J に対して，

$$\mu(J\cap E)=|J|^s \tag{1.26}$$

が成り立つことを示すことができる．

さて次に，**任意の**区間 J に対しても，

$$\mu(J\cap E)\leq|J|^s \tag{1.27}$$

が成り立つことを示そう．一般性を失うことなく，$J\subset[0,1]$ と仮定できる．

また，Jの両端点はEに属していると仮定できるし，さらに，近似して考えることによって，Jの両端点が，ある網区間の端点になっているような場合だけを考えれば十分である．さて，Jを含む最小の網区間をIとおこう．IはE_jの成分であるとする．すると，Iの定め方から，Jは$E_{j+1}\cap I$を構成する2つ以上の網区間と交わっていなければならない．そこで，これらを$J_q, J_{q+1}, \cdots, J_r$, $1\leq q<r\leq m$, とおく．このとき，

$$(1.28)\qquad |J_q\cap J|^s+|J_{q+1}|^s+\cdots+|J_{r-1}|^s+|J_r\cap J|^s\leq |J|^s$$

が成り立つことを示そう．$J_q\cap J$がJ_qと一致しないならば，JをJ_qの側にふくらませていくとき，明らかに(1.28)の左辺の方が右辺より増加率が大きい．$J_r\cap J$に対しても全く同様であるから，結局，JとJ_qの左端点がそれぞれ一致し，JとJ_rの右端点がそれぞれ一致するような場合に，(1.28)が成り立つことを示せば十分である．すると，示すべき不等式は，$k=r-q+1$とおいて，

$$(1.29)\qquad k|J_i|^s\leq |J|^s=(k|J_i|+(k-1)d)^s$$

である．(1.23)と(1.24)から，$k=m$に対しては明らかに成立している．また，$k=1$のときも明らかに成立している．ところで，(1.29)の右辺はkの凸関数である．以上から，任意の$1\leq k\leq m$に対して，(1.29)が成り立つことがわかった．ゆえに，(1.28)が従う．

さて，$J_q\cap J$あるいは$J_r\cap J$が1つの網区間でない場合は，上述の操作を$J_q\cap J$あるいは$J_r\cap J$に適用して，E_{j+1}とE_{j+2}の閉区間を含む(1.28)と類似の不等式を得ることができる．同様にこの操作を有限回繰り返すことによって，結局，Jに含まれ，$J\cap E$を被覆するような互いに交わらない有限個の網区間がとれて，それぞれの長さのs乗の和が$|J|^s$を越えないようにできる．こうして，(1.26)を用いて(1.27)が従うのである．

すでに述べたように，(1.25)における下限は，任意に固定した$\delta>0$に対して，δ被覆となるようなすべての網区間列$\mathcal{I}$に制限しても差し支えなかった．したがって，$\mathcal{H}^s(E)\leq\mu(E)$を得る．一方，(1.27)から，$E$を被覆する任意の区間列$\{J_i\}$に対して，

$$\mu(E)\leq\sum\mu(J_i\cap E)\leq\sum|J_i|^s.$$

ゆえに，$\mu(E)\leq\mathcal{H}^s(E)$を得る．したがって，$\mathcal{H}^s(E)=\mu(E)=1$が成り立つ．　□

網区間の代わりに，網としての性質をもつような正方形あるいは立方体を用いることによって，高次元空間においても同様な集合を構成することができ，そのハウスドルフ次元の決定およびハウスドルフ測度の評価が可能であろう．

定理 1.15 で用いた方法は，例えば，E の構成における各区間 I 上での $J_1, \cdots, J_m$ の配置に関して，それらの長さがほとんど等しく，またそれらがほとんど等間隔に並んでいるような場合に対して拡張できて，そのような場合にも E のハウスドルフ次元を正確に求めることができる．同様に，(1.23) および (1.24) 式が $j\to\infty$ の極限において成立するような一般の場合に対しても，E のハウスドルフ次元を求めることができる．

与えられた集合のハウスドルフ次元を求めるために，すでに次元のわかっている集合に変形し，補題 1.8 を用いるという方法もある．このことに関しては，定理 8.15(a) を参照されたい．

Eggleston (1952) は，カントール集合のように単調減少列によって定義されるようなかなり一般の集合に対して，そのハウスドルフ次元を求めた．この結果は後に，Peyrière (1977) によりさらに一般化された．最近，Davies & Fast (1978) はハウスドルフ次元を求める強力で興味ある方法を開発した．その他の関連論文としては，Randolph (1941)，Erdös (1946)，Ravetz (1954)，Besicovitch & Taylor (1954)，Beardon (1965)，Best (1942)，Cigler & Volkmann (1963)，Wegmann (1971 *b*) などを参照のこと．特に，最後の 3 つの論文は，それぞれ以前の研究をさらに進展させたものである．ハウスドルフ測度の評価に関する別の方法については 8.3 節で取り扱う．

第 1 章の練習問題

1.1　μ を σ 集合体 $\mathcal{M}$ 上の測度とし，$E_j \in \mathcal{M}$ $(1 \le j < \infty)$ は $\mu(\bigcup_1^\infty E_j) < \infty$ を満たしているとする．このとき，次の不等式を示せ．

$$\mu(\varlimsup_{j\to\infty} E_j) \ge \varlimsup_{j\to\infty} \mu(E_j).$$

1.2　ν は距離空間 (X, d) 上の外測度とし，任意のボレル集合は ν 可測であるとする．このとき，ν は距離外測度になることを示せ．

1.3 $\mathbb{R}^n$ 上のハウスドルフ s 次元外測度 $\mathcal{H}^s$ は平行移動に関して不変である．すなわち，任意の $\mathbb{R}^n$ の部分集合 E に対して，$x+E=\{x+y\colon y\in E\}$ とおくとき，$\mathcal{H}^s(x+E)=\mathcal{H}^s(E)$ が成り立つことを示せ．このことから，$x+E$ が $\mathcal{H}^s$ 可測であることと，E が $\mathcal{H}^s$ 可測であることとは同値であることを示せ．同様に，$cE=\{cy\colon y\in E\}$ とおくとき $\mathcal{H}^s(cE)=c^s\mathcal{H}^s(E)$ が成り立つことを示せ．

1.4 一般の測度 μ に関する次の Vitali の被覆定理を示せ：E は $\mathbb{R}^n$ の μ 可測集合で $\mu(E)<\infty$ を満たしているとし，$\mathcal{V}$ は可測集合からなる E に関するヴィターリ族であるとする．このとき，$\mu(E\backslash\bigcup_i U_i)=0$ を満たす互いに交わらない部分列 $U_1, U_2, \cdots\in\mathcal{V}$ が存在する．

1.5 Vitali の被覆定理を用いて Lebesgue の密度定理を証明せよ．(任意に固定した $0<\alpha<1$ と $\rho>0$ に対して，閉球からなる集合族 $\mathcal{V}=\{B_r(x)\colon x\in E, r\leq\rho$ かつ $\mathcal{L}^n(B_r(x)\cap E)\leq\alpha\mathcal{L}^n(B_r(x))\}$ を考えよ．)

1.6 $\mathbb{R}^2$ において，直径が d の凸集合 U の面積は高々 $\dfrac{1}{4}\pi d^2$ であることを示せ．(例えば，U の境界上の1点を原点に選び，極座標表示により，U の面積が $\dfrac{1}{2}\displaystyle\int r(\phi)^2\,\mathrm{d}\phi$ と表わされること，および任意の ϕ に対して $r(\phi)^2+r\left(\phi+\dfrac{1}{2}\pi\right)^2\leq d^2$ が成り立つことを示せ．)

1.7 Lebesgue の密度定理から次の Steinhaus の定理を導け：E は $\mathbb{R}^1$ 上のルベーグ可測集合で正の測度をもつとする．このとき，E の差集合 $\{y-x\colon x, y\in E\}$ は原点のある近傍 $(-h, h)$ を含んでいる．一般に，E, E' を $\mathbb{R}^1$ 上の正の測度をもつルベーグ可測集合とするとき，集合 $\{y-x\colon x\in E,\ y\in E'\}$ は原点のある近傍を含むことを示せ．

1.8 μ を $\mathbb{R}^n$ 上のボレル測度とし，E は μ 可測集合で $0<\mu(E)<\infty$ を満たしているとする．このとき，次のことを示せ．

(a) 任意の点 $x\in E$ に対して，一様に，

$$\overline{\lim_{r\to 0}}\, r^{-s}\mu(B_r(x)\cap E)<c$$

を満たす正の定数 c が存在するならば，$\mathcal{H}^s(E)>0$ である．

(b) 任意の点 $x\in E$ に対して，一様に，

$$\overline{\lim_{r\to 0}}\, r^{-s}\mu(B_r(x)\cap E)>c$$

を満たす正の定数 c が存在するならば，$\mathcal{H}^s(E)<\infty$ である．

((a) に対してはハウスドルフ測度の定義を用い，(b) に対しては練習問題 1.4 で述べた Vitali の被覆定理を用いよ.)

1.9　[0,1] の 数を 10 進展開したときに，偶数の数字しか出現しないような数全体を E とおく．この集合 E のハウスドルフ次元および測度に対し，できる限りよい評価を与えよ.（実際，集合 E は $s=\log 5/\log 10$ に対する s 集合である．この集合のハウスドルフ測度を決定する問題は，カントール集合の場合と違って，少し厄介であろう．なお，8.3 節を参照のこと.）

2

密度の基本的性質

2.1 はじめに

$\mathbb{R}^n$ の部分集合 E が s 集合 $(0 \leq s \leq n)$ であるとは，E が $\mathcal{H}^s$ 可測集合であり，$0 < \mathcal{H}^s(E) < \infty$ を満たすときにいうのであった．さて，本書では以後 $s=0$ の場合を除外して考える．というのは，$s=0$ と $s>0$ の場合で取り扱いが異なるし，また0集合というのは，単に有限個の点からなる集合に他ならないからである．

これからの3つの章において，s 集合の局所的性質，特に密度と接線の存在問題を取り扱う．可算和をとる操作に関して保存されるような測度の性質は，そのまま **σ 有限な $\mathcal{H}^s$ 測度**(σ–finite $\mathcal{H}^s$–measure)をもつ可測集合，すなわち，s 集合の可算和で表わされるような集合に対しても適用することができる．しかし，それ以外のハウスドルフ次元 s をもつような集合については，有限な測度をもつ部分集合を見出すことくらいしか，それらを研究する有効な方法はないようである．これについては第5章で論じるつもりである．

以後，$0 < s \leq n$ は任意に固定されているものとし，特に断りのない限り，「測度」「可測」および「ほとんどいたるところの(すなわち，測度0の集合を除いて)」は，すべてハウスドルフ s 次元測度 $\mathcal{H}^s$ に関するものとする．

まず，本書において重要な役割を演じる密度を定義しよう．これから定義するハウスドルフ測度に対する密度はLebesgueの密度 (1.20) の自然な拡張に

なっているけれども，両者は全く異なる性質をもっているのである．粗く言えば，密度は，ある基準量と比較したときの局所的な測度を表わすものである．

中心が x で半径が r の閉球を $B_r(x)$ とおく．したがって，$|B_r(x)|=2r$ である．このとき，$\mathbb{R}^n$ 内の s 集合 E の点 x における**上密度**(upper density)，および**下密度**(lower density)を，それぞれ

$$\bar{D}^s(E,x)=\overline{\lim_{r\to 0}}\frac{\mathcal{H}^s(E\cap B_r(x))}{(2r)^s},$$

$$\underline{D}^s(E,x)=\underline{\lim_{r\to 0}}\frac{\mathcal{H}^s(E\cap B_r(x))}{(2r)^s}$$

と定義する．これらはそれぞれ**上球密度**および**下球密度**(upper and lower spherical densities)，あるいはそれぞれ**上円密度**および**下円密度**(upper and lower circular densities)とも呼ばれる．$\bar{D}^s(E,x)=\underline{D}^s(E,x)$ が成り立てば，この値を E の点 x における**密度**(density) といい，単に $D^s(E,x)$ と書き表わす．

点 $x\in E$ が $\underline{D}^s(E,x)=\bar{D}^s(E,x)=1$ を満たすとき，すなわち E の点 x における密度が1のとき，この点を E の**正則点**(regular point)という．正則点でない E の点を**非正則点**(irregular point)と呼ぶ．s 集合 E の($\mathcal{H}^s$ に関して)ほとんどいたるところの点が正則点であるとき，この集合 E は**正則**(regular)であるという．逆に，E のほとんどいたるところの点が非正則点であるとき，E は**非正則**(irregular)であるという．

正則な s 集合を特徴付けること，および集合に対する密度評価を求めることは，本書の重要な2つの目標である．密度に関しては，Lebesgue の密度定理と類似の定理を期待することはできない．すなわち，s 集合がほとんどいたるところで密度1をもつとは限らない．実際，s が整数でないときは，s 集合は正則にならないことが示されるであろう．しかし，s が整数の場合には，s 集合を正則部と非正則部とに分解することができる．非常に粗く言えば，正則な s 集合とは $\mathbb{R}^n$ 内の s 次元多様体の可測部分集合のようなものであり，これに対して，非正則な s 集合とは n 個のカントール型集合の直積のようなものである．

さて，これから密度に関する性質を論じるわけであるが，次のように別の密度を導入しておくと便利である．すなわち，s 集合 E の点 x における**上凸密**

度(upper convex density)を

$$\bar{D}_c^s(E,x)=\lim_{r\to 0}\left\{\sup\frac{\mathcal{H}^s(E\cap U)}{|U|^s}\right\} \tag{2.1}$$

によって定義する．ただし，右辺の上限は，$x\in U$ かつ $0<|U|\leq r$ を満たすあらゆる凸集合 U にわたるものとする．任意の集合に対し，それを含む同じ直径の凸集合が必ず存在することから，$x\in U$ かつ $0<|U|\leq r$ を満たすあらゆる集合 U にわたって (2.1) の上限をとったとしても，全く同じ値を定めていることがわかる．

明らかに $B_r(x)$ は凸集合であるし，任意の集合 U に対し，$x\in U$ ならば $r=|U|$ とおくとき $U\subset B_r(x)$ が成り立つことから，

$$2^{-s}\bar{D}_c^s(E,x)\leq\bar{D}^s(E,x)\leq\bar{D}_c^s(E,x) \tag{2.2}$$

を得る．

密度の基本的性質を論じる前に，何度も用いられる一般原理について注意しておこう．

まず，距離や測度の性質を介して定義された点集合が，適当な測度に関して可測になることを知る必要がたびたび生じる．そのような可測性は，実際には，ほとんど形式的に確かめられることが多いのである．というのは，そのような集合はたいてい，よく知られた可測集合から，$\underline{\lim}, \overline{\lim}$ あるいは可算和や可算個の交わりなどを用いて定義されているからである．また時には，$\bigcap_{\rho>0}E_\rho$ のような集合を考える必要が生じるけれども，各集合 E_ρ の性質から，実は正の有理数だけによる可算個の交わり $\bigcap_{\rho\in\mathbb{Q}^+}E_\rho$ と一致することが確かめられることが多い．したがって，可測性に関しては補題2.1を述べるにとどめ，以後，単に形式的な確認で十分の場合には，いちいち登場する集合の可測性を証明することはしない．

次に，密度などの条件を介して定義された点集合の測度が0になることを示す必要がたびたび生じる．このとき，例えば，ある実関数 ϕ に対して，$E=\{x\colon\phi(x)>0\}$ のハウスドルフ測度が0になることを示すためには，任意の $\alpha>0$ に対して，集合 $\{x\colon\phi(x)>\alpha\}$ の測度が0になることを示すだけで十分である．というのは，E はそのような集合の可算和 $\bigcup_{j=1}^{\infty}\{x\colon\phi(x)>1/j\}$ で表わされるからである．こうして結局，任意の $\alpha,\varepsilon>0$ に対して，不等式 $\mathcal{H}^s\{x\colon\phi(x)>\alpha\}<\varepsilon$ が成り立つことを示せば十分であることがわかる．

最後に，「一様化」の概念を説明しよう．ある性質が集合 E のほとんどいたるところで成り立つことをいうためには，任意の $\varepsilon>0$ に対して，F 上ではその性質が成立し，$E\backslash F$ の測度が ε 以下になるような E の部分集合 F の存在を示すだけで十分である．この「一様化」の方法の利点は，E より，はるかによい性質をもつように F を選ぶことができる場合が多いという点にある．例えば，定理1.6により，F を閉集合として選ぶこともできるし，また F 上で密度が一様に収束しているように F を選ぶこともできるだろう．本書を通して，E の不規則な部分を除外して作られたこのような集合を一般に F で表わすことにする．適当な一様性の条件のもとで成立する性質を一般の場合に拡張することは，全く技術的な問題なのである．

2.2　基本的な密度評価

この節では，s が整数であるなしにかかわらず成り立つような，s 集合の密度に関する基本的な性質を述べよう．線形可測集合に対して，そのような結果を最初に与えたのは Besicovitch (1928a, 1938) である．この後者の論文には，いくつかの改良された証明が載っているので参照されたい．この1次元での結果を $\mathbb{R}^n$ 内の集合に対して一般化することは，それほど困難なことではない．このことに関しては Besicovitch (1945a)，Marstrand (1954a) そして Wallin (1969) を参照のこと．

まず最初に，x の関数としての密度の可測性を示そう．関数 f: $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ が**可測** (measurable) であるとは，任意の c に対して，集合 $\{x: f(x)<c\}$ が可測集合となるときにいう．この定義において，「可測集合」のところを「ボレル集合」あるいは「開集合」で置き換えることによって，それぞれ**ボレル可測** (Borel-measurable) な関数あるいは**上半連続** (upper semicontinuous) な関数の定義が得られる．また，不等式記号「$<$」を「$\leq$」「$>$」あるいは「$\geq$」で置き換えても同等な定義を与えることがわかる．連続関数の定義から，ただちに，$\mathbb{R}^n$ 上の連続関数はボレル可測であることがわかる．

補題 2.1

E を任意の s 集合とするとき，

（a）　各 $r>0$ に対して，$\mathcal{H}^s(E\cap B_r(x))$ は x の上半連続な関数，したがって x のボレル可測関数である．

（b）　$\underline{D}^s(E,x)$ および $\bar{D}^s(E,x)$ は x のボレル可測関数である．

証明　（a）　任意に固定した $r,\alpha>0$ に対し，$F=\{x\colon \mathcal{H}^s(E\cap B_r(x))<\alpha\}$ とおこう．$x\in F$ を任意に固定する．すると，$\mathcal{H}^s$ の連続性から，$\varepsilon\searrow 0$ のとき

$$\mathcal{H}^s(E\cap B_{r+\varepsilon}(x))\searrow\mathcal{H}^s(E\cap B_r(x))$$

が成り立つことがわかる．したがって，$\mathcal{H}^s(E\cap B_{r+\varepsilon}(x))<\alpha$ を満たす正数 ε が存在する．ゆえに，$|y-x|\leq\varepsilon$ を満たす任意の点 y に対し，$B_r(y)\subset B_{r+\varepsilon}(x)$ だから，$\mathcal{H}^s(E\cap B_r(y))<\alpha$ が成り立つ．これは，F が $\mathbb{R}^n$ の開集合であることを示している．α は任意であったから，$\mathcal{H}^s(E\cap B_r(x))$ は x の上半連続な関数であることがわかる．

（b）　任意の $\alpha,\rho>0$ に対し，

$$F_{\alpha\rho}=\{x\colon \mathcal{H}^s(E\cap B_r(x))<\alpha(2r)^s \text{ を満たす } r<\rho \text{ が存在する}\}$$

とおこう．すると $F_{\alpha\rho}$ は $\{x\colon \mathcal{H}^s(E\cap B_r(x))<\alpha(2r)^s\}$ のような集合の和集合で表わされ，また，このような集合は（a）で見たように開集合であるから，$F_{\alpha\rho}$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合になることがわかる．ところで，容易に確かめられるように，

$$\{x\colon \underline{D}^s(E,x)\leq\alpha\}=\bigcap_{\substack{\rho>0\\ \delta>\alpha}}F_{\delta\rho}$$

が成り立っている．このとき，ρ あるいは δ が減少すれば，明らかに $F_{\delta\rho}$ も減少するから，右辺において，ρ,δ を有理数に制限して共通部分をとっても差し支えない．ゆえに，$\{x\colon \underline{D}^s(E,x)\leq\alpha\}$ は G_δ 集合となり，したがってボレル集合である．α は任意であったから，こうして $\underline{D}^s(E,x)$ がボレル可測関数であることがわかる．$\bar{D}^s(E,x)$ のボレル可測性も，同様の方法によって示すことができる．　□

この補題から，ただちに $\{x\colon \underline{D}^s(E,x)>\alpha\}$ のような集合の $\mathcal{H}^s$ 可測性が従う．あるいは，もっと強く，

$$\{x\colon \mathcal{H}^s(E\cap B_r(x))<\alpha(2r)^s \text{ を満たす } r\leq\rho \text{ が存在する}\}$$

のような集合の$\mathcal{H}^s$可測性が補題の証明から従う．さらに，「…を満たす$r\leq\rho$が存在する」を「…が任意の$r\leq\rho$で成り立つ」に置き換えた集合の可測性についても同様に示すことができる．

さて，まず上凸密度に対する評価を求めよう．すると，球密度に対する評価は(2.2)を用いることによって得ることができる．次の定理は，Eがコンパクトならば自明であるが，一般のs集合Eに対して成立する．

定理 2.2

Eを$\mathbb{R}^n$内の任意のs集合とするとき，($\mathcal{H}^s$に関して)ほとんどいたるところの$x\notin E$に対して$\bar{D}_c^s(E,x)=0$が成り立つ．

証明　任意に固定した$\alpha>0$に対して，次の可測集合

$$F=\{x\notin E\colon \bar{D}_c^s(E,x)>\alpha\}$$

の測度が0になることを示せば十分である．さて，$\mathcal{H}^s$の正則性から，任意の$\delta>0$に対して，$\mathcal{H}^s(E\backslash E_1)<\delta$を満たす閉集合$E_1\subset E$が存在する．次に，任意に固定した$\rho>0$に対して，次のような集合族

$$\mathcal{V}=\{U\colon U\text{ は }0<|U|\leq\rho,\ U\cap E_1=\phi\text{ かつ }\mathcal{H}^s(E\cap U)>\alpha|U|^s\text{ を満たす閉凸集合}\}\tag{2.3}$$

を考えると，上凸密度の定義式(2.1)とE_1が閉集合であることから，$\mathcal{V}$はFに関する，閉集合からなるヴィターリ族になっていることがわかる．したがって，Vitaliの被覆定理1.10(a)から，$\sum|U_i|^s=\infty$または$\mathcal{H}^s(F\backslash\bigcup U_i)=0$を満たすような互いに交わらない部分列$\{U_i\}$を$\mathcal{V}$から選出することができる．すると，(2.3)から

$$\begin{aligned}\sum|U_i|^s&<\frac{1}{\alpha}\sum\mathcal{H}^s(E\cap U_i)=\frac{1}{\alpha}\mathcal{H}^s(E\cap\bigcup_i U_i)\\&\leq\frac{1}{\alpha}\mathcal{H}^s(E\backslash E_1)<\frac{\delta}{\alpha}<\infty\end{aligned}$$

が成り立ち，したがって$\mathcal{H}^s(F\backslash\cup U_i)=0$でなければならない．ゆえに，

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_\rho^s(F)&\leq\mathcal{H}_\rho^s(F\backslash\bigcup U_i)+\mathcal{H}_\rho^s(F\cap\bigcup U_i)\\&\leq\mathcal{H}^s(F\backslash\bigcup U_i)+\sum|U_i|^s<0+\frac{\delta}{\alpha}.\end{aligned}$$

$\delta>0$と$\rho>0$は任意であったから，結局，$\mathcal{H}^s(F)=0$が従うのである．　□

定理 2.3

E を $\mathbb{R}^n$ 内の任意の s 集合とするとき，($\mathcal{H}^s$ に関して)ほとんどいたるところの $x\in E$ に対して $\bar{D}_c^s(E,x)=1$ が成り立つ．

証明 (a) まず，ほとんどいたるところの $x\in E$ に対して $\bar{D}_c^s(F,x)\geq 1$ が成り立つことをハウスドルフ測度の定義から導こう．任意に固定した $0<\alpha<1$ と $\rho>0$ に対して，

(2.4) $F=\{x\in E\colon x\in U$ かつ $|U|\leq\rho$ を満たすすべての凸集合 U に対して $\mathcal{H}^s(E\cap U)<\alpha|U|^s$ が成り立つ$\}$

と定義しよう．F は $\mathcal{H}^s$ 可測集合である．さて，任意の $\varepsilon>0$ に対して，

$$\sum|U_i|^s<\mathcal{H}^s(F)+\varepsilon$$

を満たすような F の ρ 被覆 $\{U_i\}$ が存在する．各 U_i は F と交わっている凸集合であるとして一般性を失わない．すると (2.4) から，

$$\mathcal{H}^s(F)\leq\sum_i\mathcal{H}^s(F\cap U_i)\leq\sum_i\mathcal{H}^s(E\cap U_i)$$
$$<\alpha\sum_i|U_i|^s<\alpha(\mathcal{H}^s(F)+\varepsilon).$$

$\varepsilon>0$ は任意であり，$\alpha<1$ であったから，$\mathcal{H}^s(F)=0$ でなければならないことがわかる．$\rho>0$ も任意であったから，上凸密度の定義より，$\bar{D}_c^s(E,x)\geq\alpha$ が E 内のほとんどいたるところで成立する．最後に $0<\alpha<1$ も任意であったから，結局，$\bar{D}_c^s(E,x)\geq 1$ がほとんどいたるところの $x\in E$ に対して成立する．

(b) 次に，ほとんどいたるところの $x\in E$ に対して $\bar{D}_c^s(E,x)\leq 1$ が成り立つことを，Vitali の被覆定理を用いて示そう．任意に固定した $\alpha>1$ に対して，可測集合 $F=\{x\in E\colon \bar{D}_c^s(E,x)>\alpha\}$ を考える．$F_0=\{x\in F\colon \bar{D}_c^s(E\backslash F,x)=0\}$ とおく．すると，定理 2.2 が $\mathcal{H}^s(E)=0$ のときにも成り立っていることに注意すれば，$\mathcal{H}^s(F\backslash F_0)=0$ が成り立つことがわかる．ゆえに，上凸密度の定義から，任意の $x\in F_0$ に対し $\bar{D}_c^s(F,x)\geq\bar{D}_c^s(E,x)-\bar{D}_c^s(E\backslash F,x)>\alpha$ が成り立つ．そこで，次のような集合族

(2.5) $\mathcal{V}=\{U\colon U$ は $\mathcal{H}^s(F\cap U)>\alpha|U|^s$ を満たす閉凸集合$\}$

を考えると，これが F_0 に関するヴィターリ族になっていることがわかる．よって，定理 1.10(b) から，任意の $\varepsilon>0$ に対して，$\mathcal{H}^s(F_0)\leq\sum|U_i|^s+\varepsilon$ を満たすような互いに交わらない部分列 $\{U_i\}_i$ を $\mathcal{V}$ から選出することができる．したがって (2.5) から，

$$\mathcal{H}^s(F)=\mathcal{H}^s(F_0)<\frac{1}{\alpha}\sum\mathcal{H}^s(F\cap U_i)+\varepsilon\leq\frac{1}{\alpha}\mathcal{H}^s(F)+\varepsilon.$$

$\varepsilon>0$ は任意であり，$\alpha>1$ であったから，$\mathcal{H}^s(F)=0$ でなければならないことがわかる．すなわち，$\bar{D}^s_c(E,x)\leq\alpha$ がほとんどいたるところの $x\in E$ に対して成立する．$\alpha>1$ は任意であったから，結局，$\bar{D}^s_c(E,x)\leq 1$ がほとんどいたるところの $x\in E$ に対して成立する． □

Freilich (1966) および Davies & Samuels (1974) は，かなり一般のハウスドルフ型測度に対して，定理2.2および2.3と類似の結果を得た．

(2.2) を用いることによって，本書で重要な役割を演じる球密度に関する評価を得ることができる．

系 2.4

E を $\mathbb{R}^n$ 内の任意の s 集合とする．このとき，($\mathcal{H}^s$ に関して)ほとんどいたるところの $x\notin E$ に対して $D^s(E,x)=0$ が成立する．

系 2.5

E を $\mathbb{R}^n$ 内の任意の s 集合とする．このとき，ほとんどいたるところの $x\in E$ に対して $2^{-s}\leq\bar{D}^s(E,x)\leq 1$ が成立する．

系2.4から球密度に関する数々の重要な性質を導くことができる．まず初めに，s 集合の可測部分集合に対する密度は，その部分集合内のほとんどいたるところで，もとの集合に対する密度と一致することがわかる．すなわち，ある集合に対する密度に関する条件を満たす部分集合上では，その部分集合に対応する条件がほとんどいたるところで満たされているわけである．

系 2.6

E を任意の s 集合とし，F を E の可測部分集合とする．このとき，ほとんどいたるところの $x\in F$ に対して $\underline{D}^s(F,x)=\underline{D}^s(E,x)$ および $\bar{D}^s(F,x)=\bar{D}^s(E,x)$ が成り立つ．

証明　$H=E\backslash F$ とおくと，系2.4から，ほとんどいたるところの $x\in F$ に

対して $D^s(H,x)=0$ が成立する．ゆえに，

$$\underline{D}^s(E,x)=\underline{D}^s(F,x)+D^s(H,x)=\underline{D}^s(F,x),$$
$$\bar{D}^s(E,x)=\bar{D}^s(F,x)+D^s(H,x)=\bar{D}^s(F,x).$$

□

系 2.7

$E=\bigcup_j E_j$ は $\mathcal{H}^s(E)<\infty$ を満たすような s 集合の可算和であるとする．このとき，任意の k に対し，ほとんどいたるところの $x\in E_k$ に対して $\underline{D}^s(E_k,x)=\underline{D}^s(E,x)$ および $\bar{D}^s(E_k,x)=\bar{D}^s(E,x)$ が成り立つ．

証明 各 E_k に系 2.6 を適用すればよい． □

系 2.8

E を任意の s 集合とする．E が(非)正則集合ならば，正の測度をもつ E の任意の可測部分集合も(非)正則である．

証明 系 2.6 と正則および非正則性の定義から明らかである． □

系 2.9

可測集合と(非)正則集合との共通部分は，(正の測度をもてば)(非)正則である．正則集合と非正則集合の共通部分の測度は 0 である．

証明 系 2.8 から明らか． □

次の系によって，s 集合の正則部と非正則部とをそれぞれ独立に取り扱うことができる．

系 2.10 (分解定理)

E を任意の s 集合とする．このとき，E の(非)正則点全体は，(正の測度をもてば)(非)正則である．

証明 補題 2.1 から，E の正則点および非正則点全体はそれぞれ可測集合である．したがって，系 2.6 からただちに従う． □

最後に，$\mathbb{R}^n$ $(n\geq 2)$ 内の s 集合に対する角密度の基本的性質を述べよう．この角密度は，s 集合に対する接線の研究のために，Besiovitch (1929, 1938) に

よって導入された概念である．まず，その定義を述べよう．$\boldsymbol{\theta}$ を単位ベクトルとし，ϕ を正の角度とする．点 $\boldsymbol{x}$ を頂点とし，$\boldsymbol{\theta}$ 方向の軸をもち，線分 $[\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}]$ と $\boldsymbol{\theta}$ のなす角が高々 ϕ となるような $\boldsymbol{y}$ 全体からなる閉錐を $S(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\theta},\phi)$ とおく．こうして，球密度の定義式において，閉球 $B_r(\boldsymbol{x})$ のところを閉球と閉錐の交わり $S_r(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\theta},\phi)=B_r(\boldsymbol{x})\cap S(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\theta},\phi)$ で置き換えることによって，角密度の定義が得られる．すなわち，

$$\bar{D}^s(E,\boldsymbol{x},\boldsymbol{\theta},\phi)=\varlimsup_{r\to 0}\frac{\mathcal{H}^s(E\cap S_r(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\theta},\phi))}{(2r)^s},$$

$$\underline{D}^s(E,\boldsymbol{x},\boldsymbol{\theta},\phi)=\varliminf_{r\to 0}\frac{\mathcal{H}^s(E\cap S_r(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\theta},\phi))}{(2r)^s}$$

と定義し，それぞれ E の点 $\boldsymbol{x}$ における **上角密度** および **下角密度** (upper and lower angular densities) という．このとき，角密度およびそれに関連した集合に対して，補題2.1と同様な可測性に関する性質を示すことができる．

集合 $S_r(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\theta},\phi)$ は明らかに凸集合であるから，定義よりただちに，

$$\bar{D}^s(E,\boldsymbol{x},\boldsymbol{\theta},\phi)\leq 2^{-s}|S_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\theta},\phi)|^s\bar{D}_c^s(E,\boldsymbol{x}).$$

したがって定理2.3から，ほとんどいたるところの $\boldsymbol{x}\in E$ に対して

$$\bar{D}^s(E,\boldsymbol{x},\boldsymbol{\theta},\phi)\leq 2^{-s}|S_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\theta},\phi)|^s$$

が成り立つ．そこで $|S_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\theta},\phi)|$ を計算することによって，次の評価を得る．

$$\bar{D}^s(E,\boldsymbol{x},\boldsymbol{\theta},\phi)\leq\begin{cases}2^{-s} & \left(0<\phi\leq\frac{1}{6}\pi\right),\\ (\sin\phi)^s & \left(\frac{1}{6}\pi\leq\phi\leq\frac{1}{2}\pi\right),\\ 1 & \left(\frac{1}{2}\pi\leq\phi\leq\pi\right).\end{cases}$$

一方，上角密度の下からの評価については，定理2.3の証明（a）と類似の方法によって，

$$\bar{D}^s(E,\boldsymbol{x},\boldsymbol{\theta},\phi)\geq\begin{cases}0 & \left(0<\phi<\frac{1}{2}\pi\right),\\ 2^{-s} & \left(\frac{1}{2}\pi\leq\phi\leq\pi\right)\end{cases}$$

を示すことができる(練習問題2.3を参照)．

下角密度に対する評価を求めるのは少し厄介である．これについては，接線の問題に関連して，特殊な場合を後ほど論じることにしよう．

Morgan (1935)，Gillis (1935)，Besicovitch (1938) および Dickinson (1939)

は，ここで求めた密度に関する評価が一般に最善であることを示した．すなわち，球密度および角密度の限界を実際に達成するような集合を構成したのである．

第 2 章の練習問題

2.1 E をカントール集合とし，$s=\log 2/\log 3$ とおく．このとき，任意の x に対して $\underline{D}^s(E,x)\leq 2^{-s}$ が成り立つことを示せ．これから，E は非正則集合であることが導ける．

2.2 E を $\mathbb{R}^n$ の s 集合とする．点 x を中心とし，座標軸に平行な長さ r の辺をもつ $\mathbb{R}^n$ の立方体を $S_r(x)$ とおく．このとき，ほとんどいたるところの $x\in E$ に対して $2^{-s}n^{-s/2}\leq\overline{\lim_{r\to 0}}\,\mathcal{H}^s(E\cap S_r(x))/|S_r(x)|^s\leq 1$ が成り立つことを示せ．

2.3 E を $\mathbb{R}^n$ $(n\geq 2)$ の s 集合とし，$\boldsymbol{\theta}$ を単位ベクトルとする．このとき，ほとんどいたるところの $x\in E$ に対して $2^{-s}\leq\bar{D}^s\left(E,x,\boldsymbol{\theta},\frac{1}{2}\pi\right)$ が成り立つことを示せ．($\mathcal{H}^s$ の正則性を用いて閉集合を考え，定理 2.3 の証明 (a) の方法を適用せよ．) これから，$\phi\geq\frac{1}{2}\pi$ ならば $2^{-s}\leq\bar{D}^s(E,x,\boldsymbol{\theta},\phi)$ が成り立つことが導ける．

2.4 ψ: $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ は連続的微分可能な写像で，そのヤコビアンは 0 にならないとする．このとき，任意の s 集合 E に対して，$\bar{D}^s(\psi(E),\psi(x))=\bar{D}^s(E,x)$ がすべての x で成立することを示せ．同様のことが下密度に対しても成立することを示せ．

2.5 系 2.4 と定理 1.12 を用いて，Lebesgue の密度定理 1.13 を証明せよ．

3

整数次元の集合の幾何学的構造

3.1 はじめに

この章では，sが整数の場合に，$\mathbb{R}^n$ 内のs集合に対する密度および接線に関する性質を述べよう．系2.10で示したように，任意のs集合は正則部と非正則部とに分解することができるのであるが，両者は全く異なる幾何学的構造をもった集合であることが明らかにされるであろう．ここでの目標は，正則集合を長さ有限の曲線あるいはある種の曲面の可算和の部分集合として特徴付けることである．つまり，測度論的な概念と位相的な概念を関連付けるわけである．

ここでは，$\mathbb{R}^2$ における1集合すなわち線形可測集合を詳しく論じよう．この理論の大部分は Besicovitch (1928 a, 1938) による．この後者の論文には，さらに進展した結果といくつかの改良された証明が載っているので参照されたい．彼の与えた証明のほとんどは本質的に改善の余地のないものであり，彼の用いたいくつかの幾何学的手法は驚くほど独創的なものである．この章のいくつかの結果は de Guzmán (1981) にも載っている．

3.2　曲線と連続体

正則な1集合と長さ有限の曲線とは密接に関連している．実際に，正則な1集合は，測度0の集合を除いて，長さ有限の曲線の可算和の部分集合になるのである．この節では，有限の1次元測度をもつ連続体と関連して，主に位相の立場から曲線を研究しよう．ただし，ここでは平面上の曲線に制限して考える必要はないので，一般に $\mathbb{R}^n$ 内の曲線を取り扱うことにする．

曲線(curve)あるいは**ジョルダン曲線**(Jordan curve)とは，連続な単射 $\psi\colon [a,b]\to\mathbb{R}^n$ による閉区間 $[a,b]\subset\mathbb{R}$ の像 $\Gamma=\psi[a,b]$ のことである．曲線は，すべて**連続体**(continuum)，すなわち，少なくとも2点を含む連結なコンパクト集合である．このことは，コンパクト性および連結性が連続写像によって保存されることから従う．したがって，曲線はすべてボレル集合であり，$\mathcal{H}^s$ 可測集合である．さらに，コンパクト集合からコンパクト集合への連続な全単射は連続な逆写像をもつことから，曲線を閉区間の同相写像による像として定義しても同じことである．

曲線 Γ の**長さ**(length)とは，

$$\mathcal{L}(\Gamma)=\sup\sum_{i=1}^{m}|\psi(t_i)-\psi(t_{i-1})| \tag{3.1}$$

によって定義された量のことである．ただし，右辺の上限は閉区間 $[a,b]$ のあらゆる有限分割 $a=t_0<t_1<\cdots<t_m=b$ にわたるものとする．このとき，もし $\mathcal{L}(\Gamma)<\infty$ ならば(すなわち，ψ が**有界変動**(bounded variation)な関数ならば)，Γ を**長さ有限の**(rectifiable)曲線と呼ぶ．

上述の曲線の定義は，自己交差しているような曲線を排除していることに注意しよう．しかし，一般の曲線に対しては次の補題が成り立つ．

補題 3.1

$\psi\colon [a,b]\to\mathbb{R}^n$ は $\psi(a)\neq\psi(b)$ を満たす連続写像とする．このとき，$\psi[a,b]$ は $\psi(a),\psi(b)$ を両端点とするような(自己交差しない)曲線を含んでいる．

証明　$\psi[a,b]$ 上の各重複点 x に対し，$\psi(t)=x$ を満たす t の値の最小値，最大値をそれぞれ t_1,t_2 とおき，$I_x=[t_1,t_2]$ とする．そのような閉区間の全体

を$\mathcal{I}$とする．$\mathcal{I}$は可算個の互いに交わらない閉区間からなる族である．このとき，単調増加な連続関数f: $[a,b]\to[0,1]$を，$f(a)=0$, $f(b)=1$かつt_1, t_2が$\mathcal{I}$に属するある閉区間に同時に含まれるときに限り，等式$f(t_1)=f(t_2)$が成り立つように構成することができる．次に，写像ψ_0: $[0,1]\to\mathbb{R}^n$を，$f^{-1}(u)=I_x\in\mathcal{I}$を満たす$u$に対しては$\psi_0(u)=x$，その他の$u$に対しては$\psi_0(u)=\psi(f^{-1}(u))$を満たすように定めよう．容易に確かめられるように，ψ_0は$\psi_0(0)=\psi(a)$，$\psi_0(1)=\psi(b)$を満たす連続な単射である．　□

(3.1) 式の右辺の和は，新たに分割点を付け加えたとしても，減少しないことがわかる．したがって，曲線$\psi[a,b]$が2つの曲線$\psi[a,c]$と$\psi[c,b]$，ただし$a<c<b$，に分解されるとき，これらの曲線の長さの和は，もとの曲線の長さと一致することがわかる．すなわち，共通の端点をもつような曲線族上において，$\mathcal{L}$は加法性をもっているのである．

長さ有限の曲線Γに対しては，**弧長**(arc length)によって助変数表示することが可能である．すなわち，$\psi_0[0,t]$の長さがtとなるような連続関数ψ_0: $[0,\mathcal{L}(\Gamma)]\to\mathbb{R}^n$の像として$\Gamma$を表わすことができる．そのためには$\mathcal{L}(\psi[a,u])=t$を満たす一意的な点$\psi(u)$を$\psi_0(t)$と定めればよい．さて，弧長による長さ有限の曲線$\Gamma$の助変数表示を$\psi$とすれば，(3.1) から，

$$|\psi(t_1)-\psi(t_2)|\leq|t_1-t_2| \tag{3.2}$$

が成立する．したがって，特にψは絶対連続である．

曲線の定義に関しては，Burkill & Burkill (1970, 246 頁) あるいは Pelling (1977) を参照のこと．

補題 3.2

任意の曲線Γに対して，$\mathcal{H}^1(\Gamma)=\mathcal{L}(\Gamma)$が成り立つ．

証明　曲線Γの両端点をz, wとする．$\mathbb{R}^n$から2点z, wを通る直線への**正射影**(orthogonal projection)をprojとすると，任意の$x, y\in\mathbb{R}^n$に対して，$|\mathrm{proj}\,x-\mathrm{proj}\,y|\leq|x-y|$が成り立つ．すると補題1.8およびproj $\Gamma\supset[z,w]$となることを用いて，$\mathcal{H}^1(\Gamma)\geq\mathcal{H}^1(\mathrm{proj}\,\Gamma)\geq\mathcal{H}^1([z,w])=\mathcal{L}^1([z,w])=|z-w|$を得る．

さて，曲線Γは連続な単射ψ: $[a,b]\to\mathbb{R}^n$によって表示されているとしよ

う．すると，上で求めたことから，任意の t,u に対して $\mathcal{H}^1(\psi[t,u])\ge|\psi(t)-\psi(u)|$ の成り立つことがわかる．したがって，$[a,b]$ の任意の有限分割 $a=t_0<t_1<\cdots<t_m=b$ に対して，部分弧 $\psi[t_{i-1},t_i]$ は端点を除いて互いに交わらないことから，

$$\sum_i|\psi(t_i)-\psi(t_{i-1})|\le\sum_i\mathcal{H}^1(\psi[t_{i-1},t_i])=\mathcal{H}^1(\Gamma).$$

ゆえに，$\mathcal{L}(\Gamma)\le\mathcal{H}^1(\Gamma)$ を得る．

次に，逆の不等式を示そう．$\mathcal{L}(\Gamma)<\infty$ の場合を考えれば十分である．弧長による曲線 Γ の助変数表示を ψ とする．ψ は $[0,\mathcal{L}(\Gamma)]$ から Γ への全射で，(3.2) を満たしていることから，補題 1.8 より，$\mathcal{H}^1(\Gamma)\le\mathcal{H}^1([0,\mathcal{L}(\Gamma)])=\mathcal{L}(\Gamma)$．　□

この補題と (1.14) より，長さ有限の曲線 Γ に対して，もし $s<1$ ならば $\mathcal{H}^s(\Gamma)=\infty$ であり，もし $s>1$ ならば $\mathcal{H}^s(\Gamma)=0$ となることがわかる．

系 3.3

長さ有限の曲線 Γ の弧長による助変数表示を ψ とする．このとき，$[0,\mathcal{L}(\Gamma)]$ に含まれる任意のルベーグ可測集合 E に対し，$\psi(E)$ は $\mathbb{R}^n$ の $\mathcal{H}^1$ 可測集合であり $\mathcal{H}^1(\psi(E))=\mathcal{L}^1(E)$ が成り立つ．

証明　補題 3.2 より，完全加法性をもつ2つの集合関数 $\mathcal{H}^1(\psi(\cdot))$ と $\mathcal{L}^1(\cdot)$ は $[0,\mathcal{L}(\Gamma)]$ に含まれるすべての閉区間上で一致している．したがって，測度の拡張（例えば，Kingman & Taylor (1966) を参照）を考えることにより，両者は $[0,\mathcal{L}(\Gamma)]$ に含まれるすべてのルベーグ可測集合上で一致することがわかる．　□

この系を用いて，直線上のルベーグ測度に関する結果を曲線上に適用することができる．例えば，Lebesgue の密度定理 1.13 から，長さ有限の曲線 Γ 上の $\mathcal{H}^1$ 可測集合 E と点 x を含む Γ の部分弧 I に対して，$\mathcal{H}^1(I)\to0$ のとき，ほとんどいたるところの $x\in E$ に対し $\mathcal{H}^1(E\cap I)/\mathcal{H}^1(I)\to1$ が成立することを導くことができる．

以後，この系は用いられることはないが，次の補題はこれから何度も用いられるであろう．

補題 3.4

連続体 E 上の任意の2点を x,y とし，$|x-y|=\rho$ とおく．このとき，$\mathcal{H}^1(E\cap B_\rho(x))\geq\rho$ が成立する．特に，$\mathcal{H}^1(E)\geq|E|$.

証明 固定された点 x に対し，実関数 $f\colon\mathbb{R}^n\to[0,\infty)$ を $f(z)=|z-x|$ によって定めよう．すると明らかに，任意の $z,w\in\mathbb{R}^n$ に対して，

$$|f(z)-f(w)|\leq|z-w| \tag{3.3}$$

が成立する．このとき集合 $f(E\cap B_\rho(x))$ は閉区間 $[0,\rho]$ を含むことがわかる．なぜなら，ある $0<r<\rho$ があって $r\notin f(E\cap B_\rho(x))$ であるとすれば，E は互いに交わらない2つの閉集合 $E\cap B_r(x)$ と $E\backslash B_r(x)$ の和に分解されることになり，これは E の連結性に反しているからである．したがって補題1.8より，

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^1(E\cap B_\rho(x))&\geq\mathcal{H}^1(f(E\cap B_\rho(x)))\\&\geq\mathcal{H}^1([0,\rho])=\mathcal{L}^1([0,\rho])=\rho.\end{aligned}$$

□

さて，いよいよ長さ有限の曲線の密度に関する基本的な性質を述べよう．

補題 3.5

長さ有限の曲線 Γ は正則な1集合である．

証明 定義により $\mathcal{L}(\Gamma)<\infty$，したがって補題3.2より $\mathcal{H}^1(\Gamma)<\infty$ である．また Γ は少なくとも2点を含んでいるから，補題3.4より $\mathcal{H}^1(\Gamma)>0$. ゆえに Γ は1集合である．

次に Γ は正則な集合であることを示そう．端点でない Γ 上の任意の点を x とすると，x は Γ を2つの部分弧 Γ_- と Γ_+ に分割している．このとき，十分小さい $\rho>0$ に対し，補題3.4より $\mathcal{H}^1(\Gamma_-\cap B_\rho(x))\geq\rho$ かつ $\mathcal{H}^1(\Gamma_+\cap B_\rho(x))\geq\rho$ が成り立つ．したがって $\mathcal{H}^1(\Gamma\cap B_\rho(x))\geq2\rho$ となり，ゆえに $\underline{D}^1(\Gamma,x)\geq1$ が成立する．そこで系2.5を用いると，ほとんどいたるところの $x\in\Gamma$ に対して，密度 $D^1(\Gamma,x)$ が存在し1に等しいことがわかる．□

次に，長さ有限の曲線に対して接線の存在を論じよう．$\mathbb{R}^n$ 内の s 集合 E が点 x において，$\pm\boldsymbol{\theta}$ の方向に**接線** (tangent) をもつとは，$\overline{D}^s(E,x)>0$ および任意の角度 $\phi>0$ に対して，

$$\lim_{r\to0}r^{-s}\mathcal{H}^s(E\cap(B_r(x)\backslash S_r(x,\boldsymbol{\theta},\phi)\backslash S_r(x,-\boldsymbol{\theta},\phi)))=0 \tag{3.4}$$

が成り立つときにいう．（もちろん，点 $\boldsymbol{x}$ を通る $\pm\boldsymbol{\theta}$ の方向の直線が接線である．）明らかに接線は存在すれば一意的である．

さて，長さ有限の曲線はほとんどいたるところで接線をもつということの，Besicovitch(1944) による初等的な証明を述べよう．もちろん，有界変動関数の微分可能性に関する結果を用いても証明することができる．これに関しては Kingman & Taylor(1966, 9.1節) を参照のこと．

補題 3.6

Γ は長さ有限の曲線であるとし，その両端点を $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ とおく．ϕ は(十分小さい)正の角度とする．(Γ の部分弧の両端点を結ぶ線分を，その部分弧の弦と呼ぶとき)それぞれの弦がお互いに 2ϕ より大きな角度をなすような，点 $\boldsymbol{z}$ を含むいくらでも小さい2つの閉部分弧が存在するという性質を満たす点 $\boldsymbol{z}\in\Gamma$ の集合を E とする．このとき，$\mathcal{H}^1(E)\leq(\mathcal{L}(\Gamma)-|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|)/(1-\cos\phi)$ が成り立つ．

証明　Γ の両端点 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ を通る直線を L とする．この直線 L に関して，その弦が ϕ より大きな角度をなすような Γ の閉部分弧の全体を $\mathcal{V}$ とおく．すると $\mathcal{V}$ は可測集合 E に関するヴィタ－リ族になっていることが容易にわかる．したがって被覆定理 1.10(b) より，任意の $\varepsilon>0$ に対して，

$$\mathcal{H}^1(E)\leq\sum_{i=1}^{m}|\Gamma_i|+\varepsilon\leq\sum_{i=1}^{m}\mathcal{L}(\Gamma_i)+\varepsilon \tag{3.5}$$

を満たす，互いに交わらない Γ の閉部分弧 $\Gamma_1,\cdots,\Gamma_m$ を $\mathcal{V}$ から選出することができる．そこで，曲線 Γ から $\Gamma_1,\cdots,\Gamma_m$ を除いた残りの部分弧を $\Gamma_0',\Gamma_1',\cdots,\Gamma_m'$ とおく(両端の部分弧は空かもしれない)．すると，直線 L 上への正射影を考えることによって，

$$\cos\phi\sum_i\mathcal{L}(\Gamma_i)+\sum_i\mathcal{L}(\Gamma_i')\geq|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|$$

を得る．ところで明らかに $\sum_i\mathcal{L}(\Gamma_i)+\sum_i\mathcal{L}(\Gamma_i')=\mathcal{L}(\Gamma)$ であるから，(3.5) より

$$\mathcal{H}^1(E)-\varepsilon\leq\sum_i\mathcal{L}(\Gamma_i)\leq(\mathcal{L}(\Gamma)-|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|)/(1-\cos\phi)$$

が成立する．ε は任意であったから，これより求める不等式が従う．　□

系 3.7

長さ有限の曲線 Γ と正の角度 ϕ に対して，Γ の部分集合 E を補題 3.6 で定義したものと同じ集合とする．このとき $\mathcal{H}^1(E)=0$ が成り立つ．

証明 曲線の長さの定義式 (3.1) から，任意の $\varepsilon>0$ に対して

$$\mathcal{L}(\Gamma)<\sum_{i=1}^{m}|x_i-x_{i-1}|+\varepsilon$$

を満たす Γ 上の点 $x_0, x_1, \cdots, x_m$ が存在する．このとき，x_0 と x_m は Γ の両端点であるとし，$x_0, x_1, \cdots, x_m$ はこの順に Γ 上を並んでいるとしてよい．そこで x_{i-1} と x_i にはさまれた Γ の閉部分弧を Γ_i とすれば，各 Γ_i に対して補題 3.6 を適用して，

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^1(E)&=\sum_{i=1}^{m}\mathcal{H}^1(E\cap\Gamma_i)\le\sum_{i=1}^{m}(\mathcal{L}(\Gamma_i)-|x_i-x_{i-1}|)/(1-\cos\phi)\\&=(\mathcal{L}(\Gamma)-\sum_{i=1}^{m}|x_i-x_{i-1}|)/(1-\cos\phi)<\varepsilon/(1-\cos\phi).\end{aligned}$$

$\varepsilon>0$ は任意であったから，$\mathcal{H}^1(E)=0$ を得る． □

定理 3.8

長さ有限の曲線 Γ は，その曲線上のほとんどいたるところで接線をもつ．

証明 まず連続体 Γ は少なくとも 2 点を含むことから，補題 3.4 を用いて，Γ 上のすべての点 x において $\bar{D}^1(\Gamma, x)\ge\dfrac{1}{2}$ が成り立つことがわかる．

次に曲線 Γ を表示する連続な単射を $\psi\colon[a,b]\to\mathbb{R}^n$ とする．十分小さく固定された正の角度を ϕ とする．このとき，系 3.7 より，ほとんどいたるところの $x\in\Gamma$ に対して，

$$\psi(u)\in S(x,\boldsymbol{\theta},\phi)\cup S(x,-\boldsymbol{\theta},\phi)$$

が $|u-t|<\varepsilon$ (ただし，$\psi(t)=x$) を満たす任意の $u\in[a,b]$ に対して成立するように (x を固定するごとに) 単位ベクトル $\boldsymbol{\theta}$ と正数 ε を見出すことができる．さらに，$|u-t|\ge\varepsilon$ を満たす任意の u に対しては，$\psi(u)\notin B_\rho(x)$ を満たすような正数 ρ が存在する．(そのような $\rho>0$ が存在しないとすれば，$|u_i-t|\ge\varepsilon$ かつ $\psi(u_i)\to x$ を満たす点列 $\{u_i\}$ が存在することになるが，コンパクト性より，結局 $|u-t|\ge\varepsilon$ かつ $\psi(u)=x=\psi(t)$ を満たす点 u が存在することになり，点 x が Γ の重複点となって矛盾である．) したがって，

$$\Gamma\cap(B_\rho(x)\backslash S_\rho(x,\boldsymbol{\theta},\phi)\backslash S_\rho(x,-\boldsymbol{\theta},\phi))=\phi$$

であり，明らかに $E=\Gamma$ に対して $s=1$ のときの (3.4) 式が成立する．$\phi>0$ はいくらでも小さく選ぶことができるから，結局，Γ はほとんどいたるところの $x\in\Gamma$ において接線をもつことがわかる． □

関数の微分可能性を用いて，曲線に対する接線の存在を示すことができる．すなわち，長さ有限の曲線が関数 ψ: $[a,b]\to\mathbb{R}^n$ によって表示されているとき，もし $\psi'(t)$ が存在し，しかも 0 でないとすれば，定理 3.8 の証明とほとんど同様にして，この曲線が $\psi(t)$ において接線をもつことを示すことができる．

Besicovitch (1934 *a*, 1956, 1957, 1960) は，また，無限大の 1 次元測度をもつような線や集合に対して，どのように接線を定義すべきかについて論じている．

長さ有限の曲線の可算和に含まれるような 1 集合のことを **Y 集合**という．補題 3.5 および定理 3.8 から，次のような Y 集合に関する性質が導かれる．

系 3.9

Y 集合は正則な 1 集合である．

証明　補題 3.5 より，長さ有限の曲線は正則集合である．したがって，系 2.8 より，長さ有限の曲線に含まれる任意の 1 集合 E は正則である．つまり，ほとんどいたるところの $x\in E$ に対し $D^1(E,x)=1$ が成り立つ．Y 集合はこのような集合の可算和で表わされるから，系 2.7 より，Y 集合自体も正則である． □

系 3.10

Y 集合はほとんどいたるところで接線をもつ．

証明　系 3.9 で示したように，Y 集合はほとんどいたるところで正の上密度をもっている．また定理 3.8 より，長さ有限の曲線はほとんどいたるところで $s=1$ のときの (3.4) 式を満たしている．したがって，長さ有限の曲線に含まれる任意の 1 集合 E に対しても，ほとんどいたるところで (3.4) が成立している．ゆえに，系 2.6 の証明とほとんど同様にして，Y 集合に対しても，ほとんどいたるところで $s=1$ のときの (3.4) 式が成立していることがわかる．

□

さて，正則な1集合は測度0の集合を除いて Y 集合であることが最終的に示されるのであるが，この系3.10を用いれば，正則な1集合はほとんどいたるところで接線をもつということがわかる．

次の補題に登場する集合のことを**リプシッツ集合**(Lipschitz set)という．

補題 3.11

L は $\mathbb{R}^n$ 内の固定された直線とする．E は $\mathbb{R}^n$ の有界な部分集合で，任意の2点 $x, y \in E$ に対し，線分 $[x, y]$ は直線 L に関して高々 $\phi < \frac{1}{2}\pi$ の角度しかなさないという性質をもっているとする．このとき，集合 E を含む長さ有限の曲線が存在する．

証明　一般性を失うことなく E は閉集合であるとしてよい．L 上に適当に原点を定め，原点からの(符号付きの)距離が t であるような L に関して垂直な超平面を $\Pi(t)$ とおく．$\Pi(t)$ が E と交わるような t の値の最小値，最大値をそれぞれ a, b とおく．E の性質から，各 t に対し，$\Pi(t)$ は E の点を高々1点しか含んでいないことがわかる．$\Pi(t)$ が E の点を含んでいれば $\psi(t)$ をその点とし，含んでいないような $a<t<b$ に対しては，$\Pi(t)$ に最も近い E の点($\Pi(t)$ の両側にそれぞれ存在する)を結ぶ線分と $\Pi(t)$ との交点を $\psi(t)$ と定めよう．このとき，$t_1 \neq t_2$ に対して，線分 $[\psi(t_1), \psi(t_2)]$ は直線 L に関して高々 ϕ の角度しかなさないから，明らかに $|\psi(t_1)-\psi(t_2)| \leq |t_1-t_2|/\cos\phi$ が成立する．したがって，ψ は有界変動の関数であり，長さ有限の曲線を定めている．□

次に，有限の $\mathcal{H}^1$ 測度をもつ連続体は，測度0の集合を除いて，長さ有限の曲線の可算和になること，したがって，正則な集合になることを示そう．その証明には，Besicovitch(1938)に従って，弧状連結なる概念を用いる．ここで，集合 E が**弧状連結**(arcwise connected)であるとは，任意の $z, w \in E$ に対し，常に z と w を結ぶ曲線が E 内に存在するときにいう．(少なくとも2点を含む)コンパクトな弧状連結集合は明らかに連続体である．連続体は必ずしも弧状連結ではないが，次の補題が成立する．

補題 3.12

$\mathcal{H}^1(E)<\infty$ であるような連続体 E は弧状連結である．

証明　本質的には補題3.4から導くことができる．まず E は連結であるから**鎖状連結**(chain connected)でもある．つまり，任意の $z, w\in E$ と任意の $\varepsilon>0$ に対して $|x_i-x_{i-1}|\leq\varepsilon$ が各 $1\leq i\leq m$ について成り立つような点列 $z=x_0, x_1, \cdots, x_m=w$ を E 内に見出すことができる．(このことは，任意に固定した $\varepsilon>0$ に対して，点 z と ε 鎖で結べるような E の点の集合が E 内で開集合かつ閉集合になることから従う．) このとき一般性を失うことなく，$|i-j|\geq 2$ ならば，$|x_i-x_j|>\varepsilon$ であるとしてよい．(なぜなら，もし $|x_i-x_j|\leq\varepsilon$ ならば，$x_{i+1}, \cdots, x_{j-1}$ を取り除けばよい．) そこで，各 $1\leq i\leq m$ に対し閉球 $B_{\frac{1}{2}\varepsilon}(x_i)$ を考えると，同時に3つ以上の閉球に属するような点は存在しないことがわかる．したがって補題3.4から

$$2\mathcal{H}^1(E)\geq\sum_{i=0}^{m}\mathcal{H}^1(E\cap B_{\frac{1}{2}\varepsilon}(x_i))\geq\frac{1}{2}m\varepsilon$$

が成り立つ．さて，点列 $x_0, x_1, \cdots, x_m$ に対し，この順に線分で結んだ折れ線を Γ_ε とすれば(Γ_ε は自己交差しない曲線である)，

$$\mathcal{L}(\Gamma_\varepsilon)=\sum_{i=1}^{m}|x_i-x_{i-1}|\leq m\varepsilon\leq 4\mathcal{H}^1(E) \tag{3.6}$$

が成り立つ．この折れ線 Γ_ε に対し，その長さに比例した量による助変数表示を $\phi_\varepsilon\colon[0,1]\to\mathbb{R}^n$ とする．すなわち，$z=\phi_\varepsilon(0)$ と $\phi_\varepsilon(t)$ の間にある Γ_ε の部分の長さが $t\mathcal{L}(\Gamma_\varepsilon)$ となるように定めるのである．すると，任意の $0\leq t_1<t_2\leq 1$ に対し，(3.6) から

$$|\phi_\varepsilon(t_1)-\phi_\varepsilon(t_2)|\leq\mathcal{L}(\phi_\varepsilon[t_1, t_2])\leq|t_2-t_1|4\mathcal{H}^1(E) \tag{3.7}$$

が成り立つ．言い換えれば，関数族 $\{\phi_\varepsilon\}_{\varepsilon\leq 1}$ は同程度連続である．また明らかに折れ線族 $\{\Gamma_\varepsilon\}_{\varepsilon\leq 1}$ は $\mathbb{R}^n$ の有界集合をなすから，この関数は一様有界でもある．したがって，Arzelà-Ascoli の定理(例えば，Dunford & Schwartz (1958, 第IV章6.7節)を参照)によって，関数族 $\{\phi_\varepsilon\}_{\varepsilon\leq 1}$ は相対コンパクトである．すなわち，$\phi_{\varepsilon(j)}$ が $[0,1]$ 上で連続関数 $\phi\colon[0,1]\to\mathbb{R}^n$ に一様収束するような部分列 $\varepsilon(j)\to 0$ を選出することができる．そこで $\phi[0,1]=\Gamma$ とおく．明らかに $\phi(0)=z$ かつ $\phi(1)=w$ である．さて，任意の $x\in\Gamma$ を固定して考えよう．任意の $\delta>0$ に対し $\varepsilon(j)<\frac{1}{2}\delta$ を満たし，かつ $B_{\frac{1}{2}\delta}(x)$ と $\Gamma_{\varepsilon(j)}$ が交わるような十分に

小さい $\varepsilon(j)$ を考える．すると明らかに $B_\delta(x)$ は何らかの E の点(正確には $\Gamma_{\varepsilon(j)}$ の頂点) を含むことがわかる．こうして，E は閉集合であるから，$x\in E$ を得る．したがって $\Gamma\subset E$ である．このとき ϕ が単射であれば Γ は z と w を結ぶ曲線であるし，ϕ が一般の場合でも，補題 3.1 によって，やはり z と w を結ぶ曲線が存在することがわかる． □

補題 3.13

$\mathcal{H}^1(E)<\infty$ を満たすコンパクトな弧状連結集合 E は，$\mathcal{H}^1$ 測度 0 の集合を除いて，長さ有限の曲線の可算和に等しい．

証明 まず曲線列 $\{\Gamma_j\}$ を帰納的に定めよう．E の最も離れた 2 点を結ぶ E 内の曲線を Γ_1 とする．いま，$\Gamma_1,\Gamma_2,\cdots,\Gamma_k$ まで定義されているとしよう．このとき，コンパクト集合 $\bigcup_1^k\Gamma_j$ と点 $x\in E$ との距離を考え，点 x を動かしたときの距離の最大値を d_k とおく．もし $d_k=0$ ならば，E は有限個の曲線から成り立っていることになり，これで選出は終了する．もし $d_k>0$ ならば，(最大値 d_k を達成する E の点を x として)点 x と $\bigcup_1^k\Gamma_j$ を結ぶ E 内の曲線で，端点を除いて $\bigcup_1^k\Gamma_j$ と交わらないものを Γ_{k+1} とおくのである．さて補題を示すには，すべての k に対して $d_k>0$ となる場合を考えれば十分である．各 k に対し，補題 3.4 より，

$$\mathcal{H}^1(\Gamma_{k+1})\geq d_k \tag{3.8}$$

が成り立つから，

$$\sum_{j=1}^\infty d_j\leq\sum_1^\infty\mathcal{H}^1(\Gamma_j)\leq\mathcal{H}^1(E)<\infty. \tag{3.9}$$

したがって，$j\to\infty$ のとき $d_j\to0$ となることがわかる．さらに，補題 3.2 より，各 j に対して $\mathcal{L}(\Gamma_j)=\mathcal{H}^1(\Gamma_j)\leq\mathcal{H}^1(E)<\infty$ だから，各 Γ_j は長さ有限の曲線である．いま $\bigcup_1^\infty\Gamma_j$ に属していない点 $x\in E$ を考えよう．両者の距離が $d>0$ であるとすると，$d_j<d$ なる j をとれば，点 x は Γ_{j+1} の端点に選ばれていなければならないから曲線列の定め方に反していて矛盾である．したがって，集合 E は $\bigcup_1^\infty\Gamma_j$ の閉包と一致していることがわかった．

次に，$\mathcal{H}^1(E\setminus\bigcup_1^\infty\Gamma_j)=0$ となることを示そう．k を任意に固定して考える．さて，集合族

$$\mathcal{V}=\left\{B_r(x):x\in E\setminus\bigcup_1^k\Gamma_j \text{ および } B_r(x)\cap\bigcup_1^k\Gamma_j=\phi\right\}$$

を考えると，$\bigcup_1^k \Gamma_j$ が閉集合であることから，$\mathcal{V}$ は $E\setminus\bigcup_1^k \Gamma_j$ に関する閉球からなるヴィターリ族になっていることがわかる．いま $B\in\mathcal{V}$ を任意に固定し，その中心を $\boldsymbol{x}$ とおく．このとき点 $\boldsymbol{x}$ は $\bigcup_{k+1}^\infty \Gamma_j$ の閉包に属しているから，点 $\boldsymbol{x}$ にいくらでも近い点 $\boldsymbol{y}$ を Γ_j $(j>k)$ 上に見出すことができる．ところが，この Γ_j は有限個の Γ_i $(j\geq i>k)$ あるいは Γ_i の一部を経由して $\bigcup_1^k \Gamma_j$ につながっていることから，点 $\boldsymbol{y}$ と $\bigcup_1^k \Gamma_j$ を結ぶ連続体(もちろん $\bigcup_{k+1}^\infty \Gamma_j$ に含まれる)が存在し，それに対して補題3.4を適用すれば(点 $\boldsymbol{y}$ を点 $\boldsymbol{x}$ に近づけることによって)，結局

$$\frac{1}{2}|B|\leq\mathcal{H}^1\Big(B\cap\bigcup_{k+1}^\infty \Gamma_j\Big)$$

の成り立つことがわかる．そこで，Vitaliの被覆定理1.10(b)を適用すれば任意の $\varepsilon>0$ に対して，次式が成り立つような互いに交わらない部分列 $\{B_i\}$ を $\mathcal{V}$ から選出することができる：

$$\mathcal{H}^1\Big(E\setminus\bigcup_1^k \Gamma_j\Big)\leq\sum_i |B_i|+\varepsilon\leq 2\sum_i \mathcal{H}^1\Big(B_i\cap\bigcup_{k+1}^\infty \Gamma_j\Big)+\varepsilon$$

$$\leq 2\mathcal{H}^1\Big(\bigcup_{k+1}^\infty \Gamma_j\Big)+\varepsilon.$$

ここで，ε は任意であったから，

$$\mathcal{H}^1\Big(E\setminus\bigcup_1^k \Gamma_j\Big)\leq 2\mathcal{H}^1\Big(\bigcup_{k+1}^\infty \Gamma_j\Big)$$

が成り立つ．(3.9)より，右辺は $\boldsymbol{k}\to\infty$ のとき0に収束することがわかる．したがって，$\mathcal{H}^1(E\setminus\bigcup_1^\infty \Gamma_j)=0$ を得る．　□

この補題はBesicovitchとは独立に，Ważewski(1927)によっても証明されている．

定理 3.14

E は $\mathcal{H}^1(E)<\infty$ を満たす連続体とする．このとき，$\mathcal{H}^1$ 測度0の集合を除いて，E は長さ有限の曲線の可算和に等しい．

証明　補題3.12と3.13から従う．　□

系 3.15

E は $\mathcal{H}^1(E)<\infty$ を満たす連続体とする．このとき，E は正則集合であり，ほとんどいたるところで接線をもつ．

証明 定理 3.14 より，E は測度 0 の集合を除いて Y 集合になる．したがって，系 3.9 と系 3.10 より従う． □

定理 3.14 における測度 0 の除外集合は，(自己交差を許した)長さ有限の曲線上の長さ 0 の部分集合とみなすことができる．このように，正則な 1 集合をある曲線の部分集合としてみなすというような形の結果はいくつか得られている．例えば，有限の測度をもつ任意の連続体 E は，長さが高々 $2\mathcal{H}^1(E)$ の(自己交差を許した)曲線に必ず含まれることを示すことができる(練習問題 3.5)．

さて，この節の終わりにあたり，Gołąb によって証明された，連続体列の 1 次元測度に対する**半連続性**(semicontinuity)に関する定理を述べよう．この定理は，ある性質を満たす連続体あるいは曲線の中で最大の測度をもつようなものの存在を示すときによく用いられ，幾何学的測度論の分野では非常に重要な役割を演じている．その証明には，有名な Blaschke(1916) の選出定理を用いる．Rogers(1970) はこの選出定理をさらに一般的に論じている．

$\mathbb{R}^n$ 内の任意の部分集合 E に対し，E の **δ 平行体**(δ-parallel body)とは，E からの距離が δ 以下であるような点の集合(閉集合になる)のことであり，これを $[E]_\delta$ と書く．すなわち，

$$[E]_\delta=\{x\in\mathbb{R}^n\colon \inf_{y\in E}|x-y|\le\delta\}.$$

次に，$\mathbb{R}^n$ のすべての空でないコンパクト集合からなる集合族上で，**ハウスドルフの距離**(Hausdorff metric) δ を

$$\delta(E,F)=\inf\{\delta\colon E\subset[F]_\delta \text{ および } F\subset[E]_\delta\}$$

によって定義する．容易に確かめられるように，このようにして定めた δ は実際に距離の公理を満たしていることがわかる(練習問題 3.3)．

定理 3.16 (Blaschke の選出定理)

$\mathbb{R}^n$ 内の有界な部分集合 B に含まれるような，空でないコンパクト集合からなる無限の集合族を $\mathcal{C}$ とする．このとき，ある空でないコンパクト集合 E に，ハウスドルフの距離の意味で収束するような部分列 $\{E_j\}$ を $\mathcal{C}$ から選出するこ

とができる．

証明　まず $\mathcal{C}$ からコーシー列を選び出そう．適当に $\mathcal{C}$ から選出された無限列を $\{E_{1,i}\}_i$ とする．このとき，各 $k>1$ に対し，$\{E_{k-1,i}\}_i$ からその無限部分列 $\{E_{k,i}\}_i$ を次のようにして選び出すものとする．すなわち，まず B を被覆するような，高々 $1/k$ の直径からなる有限個の閉球の集まり $\mathcal{B}_k$ を固定して考えよう．このとき，各 i について，$E_{k-1,i}$ は何個かの $\mathcal{B}_k$ に属する閉球と交わっているのであるが，そのような閉球の組み合わせは有限通りであるから，結局，無限個の i に対して，$E_{k-1,i}$ と交わるような閉球の組み合わせが少なくとも1通りは存在しなければならない．そこで，そのような閉球の組み合わせを1つ選び，それに対応する $\{E_{k-1,i}\}_i$ の無限部分列を $\{E_{k,i}\}_i$ と定めるのである．さらに，その組み合わせに対応する閉球の和集合を F とすれば，$E_{k,i}\subset F\subset [E_{k,i}]_{1/k}$ が成り立つ．したがって，すべての i に対して $\delta(E_{k,i},F)\leq 1/k$ が成り立ち，ゆえに任意の i,j に対して $\delta(E_{k,i},E_{k,j})\leq 2/k$ を得る．さて，$E_i=E_{i,i}$ と定めよう．すると，ただちに

$$\delta(E_i,E_j)\leq 2/\min\{i,j\} \tag{3.10}$$

が従い，したがって列 $\{E_i\}_i$ はコーシー列をなしていることがわかる．

次に，このコーシー列が

$$E=\bigcap_{j=1}^{\infty}\overline{\bigcup_{i=j}^{\infty}E_i}$$

に収束することを示そう．(ただし，$\bar{F}$ は F の閉包を表わす．) すると，空でないコンパクト集合の単調減少列の共通部分として，E は空でないコンパクト集合である．さて，(3.10) より，すべての j に対して $\overline{\bigcup_{i=j}^{\infty}E_i}\subset[E_j]_{2/j}$ となるから，$E\subset[E_j]_{2/j}$ を得る．一方で，任意の $x\in E_j$ に対して，(3.10) より $x\in[E_i]_{2/j}$ がすべての $i\geq j$ に対して成立している．したがって，すべての $k\geq j$ に対して $x\in[\overline{\bigcup_{i=k}^{\infty}E_i}]_{2/j}$ が従う．そこで，各 $k\geq j$ に対し，$|x-y_k|\leq 2/j$ を満たすような点 $y_k\in\overline{\bigcup_{i=k}^{\infty}E_i}$ を選ぶ．一般性を失うことなく，点列 $\{y_k\}$ はある $y\in\mathbb{R}^n$ に収束するとしてよい．このとき $|x-y|\leq 2/j$ および $y\in\bigcap_{k=1}^{\infty}\overline{\bigcup_{i=k}^{\infty}E_i}=E$ が成り立つから，$x\in[E]_{2/j}$ を得る．したがって $E_j\subset[E]_{2/j}$ となり，ゆえに $\delta(E,E_j)\leq 2/j$ を得る．こうして列 $\{E_j\}$ は，ハウスドルフの距離の意味で，E に収束していることがわかった．　□

上述した証明の後半部は，本質的に，ハウスドルフの距離を備えた $\mathbb{R}^n$ の空でないコンパクト集合全体が「完備な」距離空間になることを示している．

連続体 E が**樹木集合**(tree)であるとは，E の任意の2点が E 内の長さ有限の曲線によって一意的に結ばれているときにいう．次の補題は，樹木集合列に対する半連続性を導くときに用いられ，一般の連続体列に対する半連続性については，樹木集合による近似を考えることによって導くことができる．

補題 3.17

F は $\mathcal{H}^1(F)<\infty$ を満たすような $\mathbb{R}^n$ 内の樹木集合とする．このとき，任意の $\delta>0$ に対して，次のような性質を満たす F の分解 $F=\bigcup_{i=1}^k F_i$ が存在する．

(a)　各 F_i は連続体で，$\sum_{i=1}^k |F_i| \le \sum_{i=1}^k \mathcal{H}^1(F_i)=\mathcal{H}^1(F)$,

(b)　各 i について，$|F_i|\le\delta$,

(c)　$k\le 3\delta^{-1}\mathcal{H}^1(F)+1$.

証明　$|F|\le\delta$ であれば，$k=1, F_1=F$ とおけば明らかであるから，$|F|>\delta$ の場合を考えよう．F に属する点 x を任意に固定しておく．このとき，F の点 w を動かしたときの，x と w を結ぶ一意的な F 内の曲線の長さの上限を m とおく．すると明らかに $m\le\mathcal{H}^1(F)<\infty$ である．また，$|F|>\delta$ であるから，$m>\frac{1}{2}\delta$ でなければならない．そこで，x と y を結ぶ F 内の曲線の長さが $m-\frac{1}{6}\delta$ 以上であるような F 上の点 y と，この曲線上の点 z で，x と z を結ぶ F 内の曲線の長さがちょうど $m-\frac{1}{2}\delta$ となるような点 z を考えよう．すると，この点 z によって F は2つの樹木集合 F_1 と F' に分解される．F_1 と F' の共通部分は1点 z のみであり，また，y を含む方を F_1 とするのである(図3.1参照)．このとき，F_1 の任意の点と z を結ぶ F 内の曲線の長さは $\frac{1}{2}\delta$ 以下でなければならないから，$|F_1|\le\delta$ を得る．補題3.4より $|F_1|\le\mathcal{H}^1(F_1)$ であり，また F_1 は y と z を結ぶ曲線を含んでいるから，$\mathcal{H}^1(F_1)\ge\left(m-\frac{1}{6}\delta\right)-\left(m-\frac{1}{2}\delta\right)=\frac{1}{3}\delta$ が成り立つ．

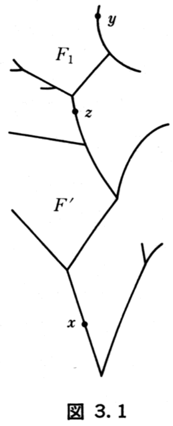


図 3.1

さて，もし $|F'|>\delta$ ならば，上述の操作をもう一度行ない，F' から部分樹木集合 F_2 を切り取る．以下同様にして，残った樹木集合 F_k の直径が δ 以下になるまでこの操作を繰り返す．このとき（a）および（b）は明らかである．一方，$1\le i\le k-1$ に対して $\frac{1}{3}\delta\le\mathcal{H}^1(F_i)$ が成り立つから，（a）より（c）が従うのである．□

定理 3.18

$\mathbb{R}^n$ 内の連続体列 $\{E_j\}$ は，ハウスドルフの距離の意味で，ある空でないコンパクト集合 E に収束しているとする．このとき，E は連結集合(したがって，少なくとも2点を含めば連続体になる)であり，

$$\mathcal{H}^1(E)\le\varliminf_{j\to\infty}\mathcal{H}^1(E_j)$$

が成り立つ．

証明　まず E が連結集合になることを背理法によって示そう．コンパクト集合 E が連結でないとすれば，互いに交わらないような空でない閉集合 G_1, G_2 が存在して，E は $E=G_1\cup G_2$ のように分解される．このとき，G_1 と G_2 は強分離しており，両者の距離を $\delta>0$ とおく．すると，十分大きな j に対し $E_j\subset[G_1]_{\frac{1}{4}\delta}\cup[G_2]_{\frac{1}{4}\delta}$ が成り立っているが，$[G_1]_{\frac{1}{4}\delta}$ と $[G_2]_{\frac{1}{4}\delta}$ は互いに交わらない閉集合で，それぞれ E_j の点を含んでいなければならないから，これは E_j の連結性に反している．ゆえに E は連結である．

次に定理の不等式を示そう．一般性を失うことなく，ある正数 c が存在して $\mathcal{H}^1(E_j)\le c$ がすべての j に対して成立しているとしてよい．まず，0に収束するような正数列 $\{\delta_j\}$ を適当に固定しよう．各 j に対し，E_j に属する有限個の点を選んで，それらの点の δ_j 近傍が E_j を被覆しているようにすることができる．このような E_j の有限部分集合を S_j とする．すると容易に確かめられるように，集合列 $\{S_j\}$ もハウスドルフの距離の意味で E に収束している．一方，E_j の1次元測度は有限だから，補題3.12より，各 E_j は弧状連結である．このとき，$S_j\subset F_j\subset E_j$ を満たすような樹木集合 F_j を構成することができる．(そのためには，まず S_j に属する2点 x と y を結ぶ E_j 内の曲線を Γ_1 とする．次に S_j に属する他の点 z と y を結ぶ E_j 内の曲線を Γ_2 とし，点 z の方から見て Γ_2 が初めて Γ_1 と交わる点を w とする．このとき，w と z を結ぶ Γ_2 の部分弧と Γ_1 との和集合を考えると，あたかも Γ_1 から z に枝を延ばしたような

樹木集合になっている．以下，同様の操作を有限回繰り返すことにより，S_j の各点を枝でつないだ樹木集合 $F_j \subset E_j$ を得ることができるのである．）すると明らかに，この樹木集合列 $\{F_j\}$ もまた，ハウスドルフの距離の意味で E に収束している．

さて，任意に固定した $\delta > 0$ に対し，補題 3.17 を適用すれば，各樹木集合 F_j は $F_j = \bigcup_{i=1}^k F_{ji}$ のように分解され，すべての i, j に対して $|F_{ji}| \leq \delta$，かつすべての j に対して $\sum_{i=1}^k |F_{ji}| \leq \mathcal{H}^1(F_j)$ が成立している．（このとき，$k \leq 3\delta^{-1}c+1$ が各 j に対して成立するから，一般性を失うことなく，k は j に無関係な数であるとしてよい．）そこで，各 $1 \leq i \leq k$ に対して，樹木集合列 $\{F_{ji}\}_j$ に定理 3.16 を適用しよう．このとき，一般性を失うことなく，列 $\{F_{ji}\}_j$ は，ハウスドルフの距離の意味で，空でないコンパクト集合 H_i に収束しているとしてよい．すると明らかに，各 i について $|H_i| \leq \delta$ であり，また $E \subset \bigcup_1^k H_i$ が成立している．したがって，

$$\mathcal{H}_\delta^1(E) \leq \sum_i |H_i| = \lim_{j\to\infty} \sum_i |F_{ji}| \leq \varliminf_{j\to\infty} \mathcal{H}^1(F_j) \leq \varliminf_{j\to\infty} \mathcal{H}^1(E_j)$$

が成り立つ．ここで $\delta > 0$ は任意であったから，これより求める不等式が従うのである．□

この定理の系として，幾何学の問題によく用いられる次のような選出定理を得る．

系 3.19

$\mathbb{R}^n$ 内のある有界部分集合に含まれ，$\mathcal{H}^1$ 測度が c 以下であるような連続体からなる無限の集合族を $\mathcal{C}$ とする．このとき，$\mathcal{H}^1(E) \leq c$ を満たすようなある連結な空でないコンパクト集合 E に，ハウスドルフの距離の意味で収束しているような部分列を $\mathcal{C}$ から選出することができる．

証明 定理 3.16 より，ある空でないコンパクト集合 E に収束するような部分列 $\{E_j\}$ を $\mathcal{C}$ から選出することができる．定理 3.18 より，E は連結であり，不等式 $\mathcal{H}^1(E) \leq c$ を満たすことがわかる．□

Besicovitch (1938) は，1 集合に関する彼の理論を展開するにあたって，（完

全な証明を与えることなしに）この定理3.18と系3.19を用いたのであるが，これらの結果はすでにGołąb(1929)によって証明されていたのである．ここで述べた証明は，与えられた円と交わるすべての直線と交わるような最短の曲線を求める問題に関連して，Faber, Mycielski & Pedersen(1984)らが与えたものである．

高次元の集合に対する類似の結果については，3.5節を参照されたい．

3.3　密度と正則な1集合の特徴付け

この節では，平面上の非正則な1集合の下密度に対する本質的上界を求めよう．これによって，正則および非正則な1集合をそれぞれ特徴付けることができるのである．

あらゆる長さ有限の曲線との共通部分の$\mathcal{H}^1$測度が0になるような1集合を**Z集合**という．すると補題3.5から，任意の非正則な1集合はZ集合になることがわかる．また次の補題も成り立つ．

補題 3.20
有限の$\mathcal{H}^1$測度をもつ連続体とZ集合の共通部分の$\mathcal{H}^1$測度は0である．

証明　定理3.14とZ集合の定義から明らかである．　□

この節の主目的は，Z集合の下密度がほとんどいたるところで1より真に小さいことを示すことである．そのためには，Besicovitch(1938, 15節)の導入した**円対**(circle-pair)を用いよう．（円対とは，それぞれの中心が互いの円周上に乗っているような，半径の等しい2つの円からなる図形のことである．）この証明は複雑ではあるが非凡である．ここでは，Morse & Randolph(1944, 9節)によって一般化されたBesicovitchの証明を述べよう．まず初めに，連続体から無限個の開円板を取り除いた残りの集合に関する位相的結果を述べる．

補題 3.21

E を $\mathbb{R}^2$ 内の連続体とする．E に含まれる閉円板の列 $\{B_i\}_1^\infty$ は，任意の $i \neq j$ に対して $B_i \not\subset B_j$，かつ任意の $d>0$ に対して $|B_i| \geq d$ を満たすような i は有限個しかないという性質を満たしているとする．このとき，各閉円板 B_i の境界を Γ_i とすると，

$$F=(E\setminus\bigcup_i B_i)\cup\bigcup_i \Gamma_i$$

は連続体になる．

証明　まず集合 F は閉集合になることを示そう．F は $F=(E\setminus\bigcup_i \mathrm{int}\, B_i)\cup\bigcup_i \Gamma_i$ と表わすことができるから，$\overline{\bigcup_i \Gamma_i}\subset F$ を示すだけで十分である．そこで任意の点 $x\in\overline{\bigcup_i \Gamma_i}\setminus(E\setminus\bigcup_i \mathrm{int}\, B_i)$ を考えると，明らかに $x\in\bigcup_i \mathrm{int}\, B_i$ であるから，何らかの k が存在して $x\in\mathrm{int}\, B_k$ が成り立つ．点 x と Γ_k の距離を $d>0$ とおく．いま，$B_{\frac{1}{2}d}(x)$ と交わっているような Γ_j を考えれば，(B_j と $B_{\frac{1}{2}d}(x)$ が交わるだけでなく) $B_j\not\subset B_k$ であるから，$\mathbb{R}^2\setminus B_k$ と B_j も交わっていなければならない．したがって，$|B_j|\geq\frac{1}{2}d$ が成り立ち，補題の仮定から，このような j は有限個でなければならない．ところが $x\in\overline{\bigcup_i \Gamma_i}$ であったから，何らかの k が存在して $x\in\Gamma_k\subset F$ が成り立つことがわかる．つまり F は閉集合である．

次に F の連結性を背理法を用いて示そう．いま互いに交わらないような空でない2つの閉集合 F_1 と F_2 があって，F は $F=F_1\cup F_2$ のように分解されているとする．このとき，

$$E_1=F_1\cup\bigcup_{\{i:\Gamma_i\subset F_1\}}B_i,\qquad E_2=F_2\cup\bigcup_{\{i:\Gamma_i\subset F_2\}}B_i$$

とおこう．各 Γ_i は F_1 か F_2 のどちらか一方に含まれていなければならないから，各 B_i は E_1 か E_2 のどちらかに必ず含まれている．ゆえに $E_1\cup E_2=E$ が成り立つ．また，もし B_i と B_j が交わっていれば，必ず Γ_i と Γ_j は交わらなければならない．したがって，Γ_i, Γ_j がそれぞれ F_1, F_2 に含まれていれば，B_i と B_j は決して交わることはない．さらに，各 i に対して $F\cap B_i\subset\bigcup_j \Gamma_j$ が成り立つことから，その境界が F_1 に含まれるような開円板 $\mathrm{int}\, B_i$ は F_2 の点を含まないし，その境界が F_2 に含まれるような開円板 $\mathrm{int}\, B_j$ は F_1 の点を含まないことがわかる．ゆえに $E_1\cap E_2=\phi$ が成り立つ．次に E_1 が閉集合になることを示そう．任意の点 $x\in\overline{\bigcup_{\{i:\Gamma_i\subset F_1\}} B_i}$ を考える．もし x が，その境界が F_1 に含まれているような何らかの B_k に属していれば，明らかに $x\in E_1$ である．

そうでない場合，つまり x が，境界が F_1 に含まれるような閉円板列の極限点になっている場合は，F_1 が閉集合であるから，明らかに $x \in F_1 \subset E_1$ が成り立つ．ゆえに E_1 は閉集合である．同様にして E_2 も閉集合になり，E は $E = E_1 \cup E_2$ のように互いに交わらない2つの閉集合に分解される．これは E が連結であることに反している．　□

さて，Z 集合の下密度に対する上界を求めるときに本質的な役割を演じる次の補題を示そう．2つの円の中心が x と y であるような円対の**共通領域** (common region)を $R(x,y)$ と書く．つまり $R(x,y) = \mathrm{int}(B_{|x-y|}(x) \cap B_{|x-y|}(y))$ である．次の補題は，粗く言えば，もし1集合 E に中心をもつような円対の共通領域が E の大部分を含んでいるならば，かなりの程度 E に含まれているような曲線によって，E の多くの成分を結び付けることができるということを主張するものである．

補題 3.22

E を $\mathbb{R}^2$ 内の1集合とする．さらに，E に含まれ $\mathcal{H}^1(E_0) > 0$ を満たすようなコンパクト集合 E_0 と正数 α が存在して，任意の $x_1, x_2 \in E_0$ に対して $\mathcal{H}^1(E \cap R(x_1, x_2)) \geq \alpha |x_1 - x_2|$ が成り立っているとする．このとき，$0 < \mathcal{H}^1(H \cap E) \leq \mathcal{H}^1(H) < \infty$ を満たすような連続体 H が存在する．

証明　系2.5より，ほとんどいたるところの $x \in E_0$ に対して $\overline{D}^1(E,x) \leq 1$ が成り立つことから，いわゆる一様化の手法によって，E_0 に含まれ $\mathcal{H}^1(F) > 0$ を満たすようなコンパクト集合 F と正数 ρ_1 を見出すことができて，任意の $x \in F$ と任意の $0 < r \leq \rho_1$ に対して，

$$\mathcal{H}^1(B_r(x) \cap E) \leq 2 \cdot 2r \tag{3.11}$$

が成り立つようにできる．さらに，系2.4と2.5より，ほとんどいたるところの $y \in F$ に対して $D^1(E \backslash F, y) = 0$ および $\overline{D}^1(F,y) \geq \frac{1}{2}$ が成り立っている．そこで，このような点 y を適当に選んで固定すれば，十分に小さい $0 < \rho \leq \frac{1}{10}\rho_1$ を見出すことができて，任意の $0 < r \leq 3\rho$ に対して

$$\mathcal{H}^1((E \backslash F) \cap B_r(y)) < 2r \cdot 10^{-3}\alpha \tag{3.12}$$

および

(3.13)
$$\mathcal{H}^1(F\cap B_\rho(y))>\frac{1}{4}\cdot 2\rho=\frac{1}{2}\rho$$

が成り立つようにできる．このとき，必要であればさらに小さく ρ をとることによって，閉円板 $B_\rho(y)$ の境界 Γ は何らかの F の点を含んでいるとしてよい．

次のような閉円板からなる集合族を $\mathcal{C}$ とする：

(3.14)
$$\mathcal{C}=\{B_r(x):\mathcal{H}^1((E\backslash F)\cap B_r(x))\geq\alpha r \text{ を満たす } x\in F\cap B_\rho(y) \text{ と } 0<r<2\rho \text{ が存在する}\}.$$

もし $\mathcal{C}$ が空でなければ，補題1.9より，有限または可算無限個の互いに交わらない閉円板の列 $\{B_i\}$ を $\mathcal{C}$ から選び出して，$\bigcup_{B\in\mathcal{C}}B\subset\bigcup_i B'_i$ を満たすようにできる．ここで，B'_i は B_i と同じ中心で半径が5倍の閉円板で，任意の $i\neq j$ に対し $B'_i\not\subset B'_j$ が成り立っている．各閉円板 B'_i の境界を Γ_i と書こう．

さて，

$$G=(F\cap B_\rho(y))\cup\Gamma\cup\bigcup_i B'_i$$

とおこう．もちろん $\mathcal{C}$ が空であれば $\bigcup_i B'_i$ の項はないものとする．このGに対し，

(3.15)
$$H=(G\backslash\bigcup_i B'_i)\cup\bigcup_i\Gamma_i$$

とおく(図3.2を参照)．この集合 H が求める連続体であることを，以下に6段階に分けて示そう．

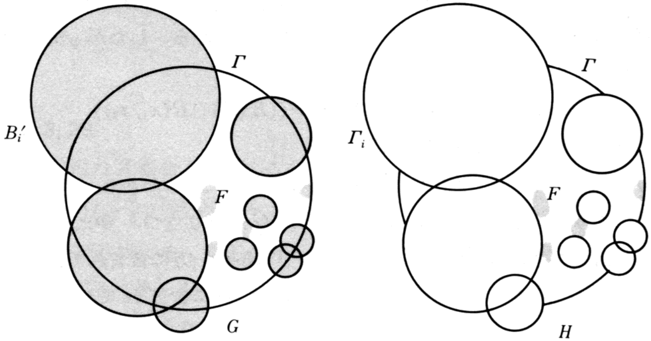


図 3.2

（a）　G が閉集合になることを示す．明らかに $F\cap B_\rho(y)$ および Γ は閉集合だから，$\overline{\bigcup_i B'_i}\subset G$ となることを示せば十分である．任意の点 $z\in\overline{\bigcup_i B'_i}$ を考えよう．もし点 z が何らかの B'_i に属していれば，明らかに $z\in G$ である．そうでない場合，つまり点 z が閉円板の列 $\{B'_i\}_i$ の部分列の極限点になっている場合は，面積を考えることにより $\sum_i |B_i|^2<\infty$，すなわち $i\to\infty$ のとき $|B'_i|\to 0$ であることから，点 z はその部分列に属する閉円板の中心からなる点列の極限点にもなっている．ところが，そのような点列は閉集合 $F\cap B_\rho(y)$ に含まれていることから，$z\in F\cap B_\rho(y)\subset G$ が成り立つ．ゆえに G は閉集合である．

（b）　G が連結であることを背理法によって示す．いま，互いに交わらないような空でない2つの閉集合 G_1 と G_2 があって，$G=G_1\cup G_2$ のように分解されているとしよう．G の任意の連結部分集合は必ず G_1 か G_2 のどちらか一方に含まれていなければならない．そこで Γ を含んでいる方を G_1 とする．さて，Γ あるいは $\mathbb{R}^2\backslash B_\rho(y)$ と交わっているような B'_i を考えると，その中心は $B_\rho(y)$ に属しているから，明らかに Γ と B'_i は交わらなければならない．したがって，B'_i は G_1 に含まれており，ゆえに $G_2\subset \mathrm{int}\, B_\rho(y)$ が成り立つ．

閉集合 G_1 と $\mathbb{R}^2\backslash B_\rho(y)$ の和集合を G'_1 とすると，G'_1 は G_2 と交わらない閉集合になる．このとき，G'_1 と G_2 はともに F の点を含んでいることに注意しよう．そこで，点 $x_1\in F\cap G'_1$ と点 $x_2\in F\cap G_2$ は，その間の距離 $r=|x_1-x_2|$ を最小にするような点であるとする．特に $\Gamma\subset G'_1$ であり，Γ は F の点を含んでいることから，$0<r<2\rho$ が従う．さらに，この2点 x_1, x_2 を中心とする円対の共通領域 $R(x_1,x_2)$ は F の点を含まないことがわかる．したがって，補題の仮定から，

$$
\begin{aligned}
0<\alpha r &\leq \mathcal{H}^1(E\cap R(x_1,x_2))=\mathcal{H}^1((E\backslash F)\cap R(x_1,x_2))\\
&\leq \mathcal{H}^1((E\backslash F)\cap B_r(x_2))
\end{aligned}
$$

が成り立つ．さて，$x_2\in F\cap B_\rho(y)$ および $r<2\rho$ であったから，$B_r(x_2)$ は $\mathcal{C}$ の要素であり，したがって $B_r(x_2)\subset\bigcup_i B'_i\subset G$ が成り立つ．ゆえに，$B_r(x_2)$ は連結集合だから，$B_r(x_2)$ は G'_1 か G_2 のどちらか一方に含まれていなければならない．ところが，x_1 は G'_1 に含まれ，x_2 は G_2 に含まれていて矛盾である．

（c）　H が連続体になることを示す．（a）と（b）より G は連続体である．

したがって補題3.21より，Hも連続体である．

(d) $\sum_i |B'_i| \leq \frac{1}{8}\rho$ となることを示す．というのは(3.12)と(3.14)から，

$$\sum_i |B'_i| = 5\sum_i |B_i| \leq \frac{10}{\alpha}\sum_i \mathcal{H}^1((E\backslash F)\cap B_i)$$
$$\leq \frac{10}{\alpha}\mathcal{H}^1((E\backslash F)\cap B_{3\rho}(y)) \leq \frac{10}{\alpha}\cdot 6\rho 10^{-3}\alpha \leq \frac{1}{8}\rho.$$

(e) $\mathcal{H}^1(H)<\infty$ となることを示す．というのは，$H\subset E\cup\Gamma\cup\bigcup_i \Gamma_i$ であるから，(d)を用いて，

$$\mathcal{H}^1(H) \leq \mathcal{H}^1(E) + 2\pi\rho + \pi\sum_i |B'_i| < \infty.$$

(f) $\mathcal{H}^1(H\cap E)>0$ となることを示す．$|B'_i|<20\rho\leq 2\rho_1$ であるから，(3.11)を用いて，

$$\mathcal{H}^1(H\cap E) \geq \mathcal{H}^1(G\cap E) - \mathcal{H}^1(E\cap\bigcup_i B'_i)$$
$$\geq \mathcal{H}^1(F\cap B_\rho(y)) - \sum_i \mathcal{H}^1(E\cap B'_i)$$
$$\geq \mathcal{H}^1(F\cap B_\rho(y)) - 2\sum_i |B'_i|.$$

ここで，(3.13)と(d)を用いて，右辺$\geq \frac{1}{2}\rho - \frac{1}{4}\rho = \frac{1}{4}\rho > 0$ を得る． □

上の補題を用いれば，円対の幾何学的性質から容易にZ集合の下密度に関する評価を導き出すことができる．集合Eの下密度の高い点を中心にもつような円対の共通領域は，正の測度をもつようなEの部分集合を含むことを示すのである．

定理 3.23

Eを$\mathbb{R}^2$内のZ集合とする．このとき，ほとんどいたるところの$x\in E$に対して$\underline{D}^1(E,x)\leq\frac{3}{4}$が成り立つ．

証明 背理法による．いま，ある$\alpha>0$があって$E_1=\left\{x: \underline{D}^1(E,x)>\frac{3}{4}+\alpha\right\}$の$\mathcal{H}^1$測度が正であるとしよう．このとき，いわゆる一様化の手法により，E_1に含まれるコンパクトな1集合E_2とある正数ρを見出して，任意の$x\in E_2$と任意の$0<r\leq\rho$に対して，

$$\mathcal{H}^1(E\cap B_r(x))>\left(\frac{3}{4}+\alpha\right)2r \tag{3.16}$$

が成り立つようにできる．さらに定理 2.3 より，ほとんどいたるところの $x\in E_2$ に対して $\bar{D}_c^1(E,x)=1$ が成り立つことから，心要であればコンパクトな 1 集合 E_2 と正数 ρ をさらに小さくとり直すことによって，任意の $x\in E_2$ と $x\in U$, $0<|U|\leq 3\rho$ を満たすような任意の集合 U に対して

$$\mathcal{H}^1(E\cap U)<(1+\alpha)|U| \tag{3.17}$$

が成り立つようにできる．さて，E_2 のコンパクトな部分集合 E_0 で，$\mathcal{H}^1(E_0)>0$ かつ $|E_0|\leq\rho$ を満たすようなものを考えよう．すると，任意の $x_1,x_2\in E_0$ に対し $r=|x_1-x_2|\leq\rho$ であり，また Z 集合の定義から，任意の円周と E の共通部分の $\mathcal{H}^1$ 測度は 0 になることから，(3.16) および $U=B_r(x_1)\cap B_r(x_2)$ に対し (3.17) を用いて，

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^1(E\cap R(x_1,x_2))&=\mathcal{H}^1(E\cap B_r(x_1))+\mathcal{H}^1(E\cap B_r(x_2))\\&\quad-\mathcal{H}^1(E\cap(B_r(x_1)\cup B_r(x_2)))\\&\geq 2\left(\frac{3}{4}+\alpha\right)2r-(1+\alpha)3r=\alpha r=\alpha|x_1-x_2|\end{aligned}$$

を得る．ここで，この $E_0\subset E$ に補題 3.22 を適用すれば，$0<\mathcal{H}^1(H\cap E)\leq\mathcal{H}^1(H)<\infty$ を満たす連続体 H の存在が従うのであるが，これは補題 3.20 に反している．したがって，すべての $\alpha>0$ に対して $\mathcal{H}^1(E_1)=0$ でなければならない． □

系 3.24

E を $\mathbb{R}^2$ 内の非正則な 1 集合とする．このとき，ほとんどいたるところの $x\in E$ に対して $\underline{D}^1(E,x)\leq\frac{3}{4}$ が成り立つ．

証明　任意の非正則な 1 集合は Z 集合であるから，定理 3.23 より明らか． □

このようにして，正則および非正則な 1 集合の下密度は全く異なる様相を呈していることがわかった．すなわち，正則 1 集合の下密度がほとんどいたるところで 1 になるのに対し，非正則な 1 集合の下密度はほとんどいたるところで $\frac{3}{4}$ 以下になるのである．したがって，正の測度をもつ集合の上で下密度が $\frac{3}{4}$ と 1 の間の値をとるような 1 集合は存在しないことがわかる．

非正則な1集合 E に対する $\underline{D}^1(E,x)$ の本質的上界の正確な値はまだ知られていない．上の定理における定数 $\frac{3}{4}$ がいままでのところ最良の値であるが，その真の値は $\frac{1}{2}$ であろうと予想されている．実際，ほとんどいたるところで，$\underline{D}^1(E,x)=\frac{1}{2}$ を満たすような1集合を構成することができる．Besicovitch (1928*a*) は最初 $1-10^{-2576}$ なる上界を与えたのであるが，その後の論文(1938)において，これを $\frac{3}{4}$ の値に改良したのである．

また Besicovitch (1938) は，彼の円対の方法を用いて非正則な1集合の密度はほとんどいたるところで存在しないことも示した．このことについては，Besicovitch & Walker (1931)，Gillis (1934*b*) および Morse & Randolph (1944) を参照のこと．

さて，いよいよ正則および非正則な1集合を特徴付けよう．

定理 3.25

$\mathbb{R}^2$ 内の非正則な1集合は Z 集合である．$\mathbb{R}^2$ 内の正則な1集合は $\mathcal{H}^1$ 測度0の集合を除いて Y 集合になる．

証明　最初の命題はすでに見ているので，第2の命題を示そう．Eを正則な1集合とすると，ほとんどいたるところの $x\in E$ に対し $\underline{D}^1(E,x)=1$ が成り立つ．さて，正の測度をもつような E の任意の可測部分集合 F を考えると，系2.6より，$\underline{D}^1(F,x)=1$ がほとんどいたるところの $x\in F$ で成立する．したがって，定理3.23より F は Z 集合ではない．ゆえに，$F\cap\Gamma$ が正の測度をもつようなある長さ有限の曲線 Γ が存在しなければならない．この事実を用いて，長さ有限の曲線列 $\{\Gamma_j\}$ を次のように定義しよう．まず，Γ_1 として

$$\mathcal{H}^1(\Gamma_1\cap E)\geq\frac{1}{2}\sup\{\mathcal{H}^1(\Gamma\cap E):\Gamma \text{ は長さ有限の曲線}\}$$

を満たすように選ぶ．次に，すでに $\Gamma_1,\cdots,\Gamma_k$ が選び出されているとしよう．$E_k=E\setminus\bigcup_1^k\Gamma_j$ とおく．このとき，もし E_k の測度が0ならば，$\{\Gamma_j\}_1^k$ が E のほとんどいたるところを被覆しているわけで，選出はこれで終了であり，明らかに定理が成り立つ．もし E_k が正の測度をもてば，Γ_{k+1} として，

$$\mathcal{H}^1(\Gamma_{k+1}\cap E_k)\geq\frac{1}{2}\sup\{\mathcal{H}^1(\Gamma\cap E_k):\Gamma \text{ は長さ有限の曲線}\}>0 \tag{3.18}$$

を満たすように選ぶものとする．さて，このような操作が無限に続く場合にも定理が成り立つことを示そう．この場合，明らかに

$$\sum_k \mathcal{H}^1(\Gamma_{k+1}\cap E_k)\leq\mathcal{H}^1(E)<\infty$$

であるから，$k\to\infty$ のとき $\mathcal{H}^1(\Gamma_{k+1}\cap E_k)\to 0$ の成り立つことがわかる．さて，いま $\mathcal{H}^1(E\backslash\bigcup_1^\infty \Gamma_j)>0$ であると仮定しよう．このとき，ある長さ有限の曲線 Γ が存在して $\mathcal{H}^1(\Gamma\cap(E\backslash\bigcup_1^\infty \Gamma_j))=d>0$ が成り立つ．ところが，$\mathcal{H}^1(\Gamma_{k+1}\cap E_k)<\frac{1}{2}d$ が成り立つように十分大きな k を見出すことができるから，これは (3.18) における Γ_{k+1} の選び方に矛盾している．ゆえに $\mathcal{H}^1(E\backslash\bigcup_1^\infty \Gamma_j)=0$ が成り立ち，集合 E は $\bigcup_j(E\cap\Gamma_j)$ なる Y 集合と測度0の集合との和として表わされる． □

非正則な1集合は Z 集合であるから，あらゆる長さ有限の曲線との共通部分は測度0の集合になる．ところが Besicovitch (1928*a*, 43節) は，非正則な1集合は長さ有限でない曲線の可算和の部分集合になることを示した．

この節の終わりにあたり，非正則集合の「不連結性」を示す結果を述べよう．集合 E のどの連結成分も1点のみからなるとき，E は**全不連結** (totally disconnected) であるという．すると，全不連結な集合 E の任意の2点 x,y に対し，それぞれ x,y を含むような互いに交わらない(相対位相の意味での)閉部分集合へ E を分解することができる．

系 3.26

非正則な1集合 E は全不連結である．

証明　2点 x,y が E の連結な閉部分集合 F に含まれているとすれば，補題3.4より $|x-y|\leq\mathcal{H}^1(F)<\infty$ が成り立つ．ところが E は Z 集合だから，補題3.20より $\mathcal{H}^1(F)=\mathcal{H}^1(E\cap F)=0$．すなわち $x=y$ でなければならない． □

3.4　接線に関する性質

密度の場合と同様に，接線に関しても，正則と非正則集合では全く異なる様相を呈する．まず正則な1集合に対しては次の定理が成り立つ．

定理 3.27

$\mathbb{R}^2$ 内の正則な1集合 E は，ほとんどいたるところで接線をもつ．

証明　定理3.25より，E は Y 集合と測度0の集合との和で表わすことができる．系3.10より，Y 集合はほとんどいたるところで接線をもつ．　□

平面上の非正則な1集合に対する接線の問題を研究するために，ここでは，Besicovitch(1938，10節)による独創的な方法を述べよう．まず初めに，次の補題を示す．

補題 3.28

$\mathbb{R}^2$ 内の直線 L に垂直な単位ベクトルを $\boldsymbol{\theta}$ とする．向かい合う頂点 $\boldsymbol{y}$ と $\boldsymbol{z}$ において，各辺がそれぞれ $\pm\boldsymbol{\theta}$ の方向に関して角 ϕ をなしているような平行四辺形を P とする(図3.3参照)．このとき，P を L 上に正射影したものの長さを d とおけば，$|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{z}|\leq d/\sin\phi$ が成り立つ．

証明　点 w を P の第3の頂点とする．すると $|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{z}|\leq|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{w}|+|\boldsymbol{w}-\boldsymbol{z}|$ および $d=(|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{w}|+|\boldsymbol{w}-\boldsymbol{z}|)\sin\phi$ が成り立つことから明らかである．　□

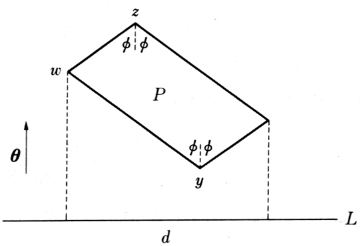


図 3.3

非正則な1集合の接線に関する次の定理は，本質的に Besicovitch の結果である．その証明には，非正則な1集合と長さ有限の曲線との共通部分の測度は0であるという事実を用いるのである．

定理 3.29

E を $\mathbb{R}^2$ 内の非正則な1集合とする．このとき，任意に固定した単位ベクト

ル $\boldsymbol{\theta}$ と任意に固定した角度 $0<\phi<\pi/2$ に対して,

$$(3.19)\qquad \bar{D}^1(E,x,\boldsymbol{\theta},\phi)+\bar{D}^1(E,x,-\boldsymbol{\theta},\phi)\geq\frac{1}{6}\sin\phi$$

がほとんどいたるところの $x\in E$ で成立する.

証明　任意に固定した3つの正数 ρ,δ_+,δ_- に対して, E の部分集合 $F_0=F_0(\delta_+,\delta_-,\rho)$ を, 次の2つの不等式

$$(3.20)\qquad \begin{cases} \mathcal{H}^1(E\cap S_r(x,\boldsymbol{\theta},\phi))\leq 2r\delta_+, \\ \mathcal{H}^1(E\cap S_r(x,-\boldsymbol{\theta},\phi))\leq 2r\delta_- \end{cases}$$

がすべての $0<r\leq\rho$ に対して同時に満たされるような $x\in E$ の集合として定めよう. さて, このようにして定めた可測集合 F_0 が正の測度をもてば, $\delta_++\delta_-$ はあまり小さくはならないことを以下に示そう.

そこで $\mathcal{H}^1(F_0)>0$ と仮定しよう. すると $\mathcal{H}^1$ の正則性から, 正の測度をもつような F_0 のコンパクトな部分集合 F_1 が存在する. さらに, 定理2.3から, ほとんどいたるところの $x\in F_1$ に対して $\bar{D}_c^s(F_1,x)=1$ が成り立っている. したがって, そのような点 x を適当に固定しておけば, 任意に固定した $0<\eta<1$ に対して,

$$(3.21)\qquad \mathcal{H}^1(F)>(1-\eta)|U|,$$

かつ $0<|U|\leq\rho$ を満たすような閉凸集合 U を見出すことができる. ただし, $F=F_1\cap U$ である. 以後この集合 U 内で考察することにする.

まず, 線分 $[y,z]$ がベクトル $\boldsymbol{\theta}$ に関して ϕ 以下の角をなすような F の2点 y,z を考える. (F は非正則な1集合であるから, 補題3.11を用いて, このような2点が必ず存在しなければならないことがわかる. この証明の後半部で類似の議論が展開される.) F は閉集合であるから, そのような2点間の距離を最大にするような2点(これらを y_1,z_1 とおく)が存在する. すなわち,

$$r_1=|y_1-z_1|=\sup\{|y-z|: z\in F\cap S(y,\boldsymbol{\theta},\phi)\ \text{かつ}\ y\in F\cap S(z,-\boldsymbol{\theta},\phi)\},$$

ただし $S(y,\boldsymbol{\theta},\phi)$ は $\boldsymbol{\theta}$ 方向の軸に関して ϕ の角度をなすような2本の半直線によって囲まれた, 頂点が y の閉じた角領域である. このとき明らかに

$$F\cap S(y_1,\boldsymbol{\theta},\phi)=F\cap S_{r_1}(y_1,\boldsymbol{\theta},\phi)$$

および

$$F\cap S(z_1,-\boldsymbol{\theta},\phi)=F\cap S_{r_1}(z_1,-\boldsymbol{\theta},\phi)$$

が成り立つ. ところで, $r_1\leq\rho$ かつ $F\subset F_0\subset E$ であるから, (3.20) より

$$
(3.22)\quad \begin{cases} \mathcal{H}^1(F\cap S(y_1,\boldsymbol{\theta},\phi))\leq 2r_1\delta_+, \\ \mathcal{H}^1(F\cap S(z_1,-\boldsymbol{\theta},\phi))\leq 2r_1\delta_- \end{cases}
$$

が成り立つ．次に，

$$
P_1=S(y_1,\boldsymbol{\theta},\phi)\cap S(z_1,-\boldsymbol{\theta},\phi)
$$

なる平行四辺形と

$$
Q_1=\mathrm{int}\{S(y_1,\boldsymbol{\theta},\phi)\cup S(z_1,-\boldsymbol{\theta},\phi)\}
$$

なる開領域を考えよう(図 3.4 参照)．このとき，(3.22) から，

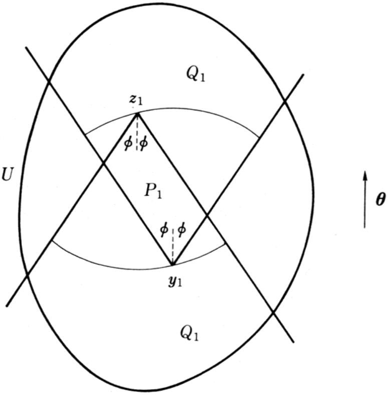


図 3.4

$$
\mathcal{H}^1(F\cap Q_1)\leq 2r_1(\delta_+ +\delta_-)
$$

が成り立つ．さて，集合 $U\backslash Q_1$ はコンパクトであり，高々 2 個の成分(閉凸集合)をもつことがわかる．そこで，$U\backslash Q_1$ の同じ成分に属する F の 2 点で，それらを結ぶ線分がベクトル $\boldsymbol{\theta}$ に関して ϕ 以下の角をなすようなものが存在すれば，全く同様にして，平行四辺形 P_2 と開領域 Q_2 を(前者は Q_1 の外部に)定めることができる．一般に $Q_1,\cdots,Q_{j-1}$ まで定義されているとき，$U\backslash\bigcup_{i=1}^{j-1}Q_i$ の同じ成分に属する F の 2 点で，上述の性質を満たすものがあれば，その 2 点間の距離を最大にするようなもの(これらを y_j, z_j とおく)を考え，$r_j=|y_j-z_j|$ として，平行四辺形

$$
P_j=S(y_j,\boldsymbol{\theta},\phi)\cap S(z_j,-\boldsymbol{\theta},\phi)
$$

および開領域

$$Q_j = \mathrm{int}\{S(y_j, \boldsymbol{\theta}, \phi) \cup S(z_j, -\boldsymbol{\theta}, \phi)\}$$

を定義する．このとき明らかに，

$$\mathcal{H}^1(F \cap Q_j) \leq 2r_j(\delta_+ + \delta_-) \tag{3.23}$$

が成り立っている．このようにして，有限あるいは可算無限個の平行四辺形の列 $\{P_j\}$ および開領域の列 $\{Q_j\}$ を構成していくのである．

ベクトル $\boldsymbol{\theta}$ に垂直な1つの直線を L とする．このとき $j>i$ ならば P_j と Q_i は互いに交わらないから，明らかに，平行四辺形列 $\{P_j\}$ を L 上に正射影した閉線分列の各内部は互いに交わることはない．ゆえに，補題3.28を用いて，

$$\sum_j r_j = \sum_j |y_j - z_j| \leq \frac{3|U|}{\sin\phi} \tag{3.24}$$

を得る．ここで右辺に係数3がつく理由は，両端の2つの平行四辺形が U からはみ出る可能性があるからである．(そのような平行四辺形 P_j に対しては，明らかに $|y_j - z_j| \leq |U| \leq |U|/\sin\phi$ が成り立っている．)

さて，集合 $F\backslash\bigcup_i Q_i$ はある長さ有限の曲線 Γ の部分集合になっていることを示そう．そのためには，$F\backslash\bigcup_i Q_i$ に属する任意の異なる2点 y, z に対し，線分 $[y, z]$ はベクトル $\boldsymbol{\theta}$ に関して ϕ 以上の角をなしていることを背理法で示す．2点 y, z が，ある閉凸集合から Q_j を除いた残りの2つの連結成分のそれぞれに属している場合には，明らかに $[y, z]$ は $\boldsymbol{\theta}$ に関して ϕ 以上の角をなしているから，$[y, z]$ が $\boldsymbol{\theta}$ に関して ϕ より小さい角をなしているとすれば，y と z は各 $j=1, 2, \cdots$ に対し $U\backslash\bigcup_{i=1}^{j-1} Q_i$ の同じ成分に属していなければならない．(すなわち，$\{P_j\}$ が無限に構成できる場合である．) ところで，y_j, z_j の定め方から，すべての j に対し $|y-z| \leq |y_j - z_j|$ が成り立つはずであるが，(3.24) より，$j\to\infty$ のとき $|y_j - z_j| \to 0$ だから矛盾である．したがって，$F\backslash\bigcup_i Q_i$ の任意の異なる2点を結ぶ線分は直線 L に関して $\frac{1}{2}\pi - \phi$ 以下の角をなすことがわかった．すると補題3.11より，$F\backslash\bigcup_i Q_i$ を含むようなある長さ有限の曲線が存在することがわかる．ところで，$F\backslash\bigcup_i Q_i$ は E の部分集合であり，E は Z 集合であることから，次式の成り立つことがわかる：

$$\mathcal{H}^1(F\backslash\bigcup_i Q_i) = 0.$$

したがって，(3.23), (3.24) および (3.21) を用いて

$$\mathcal{H}^1(F) \leq \sum_j \mathcal{H}^1(F \cap Q_j) \leq 2(\delta_+ + \delta_-)\sum_j r_j$$

$$\leq \frac{6(\delta_+ + \delta_-)|U|}{\sin\phi} < \frac{6(\delta_+ + \delta_-)}{(1-\eta)\sin\phi}\mathcal{H}^1(F)$$

が成り立つ．ここで $\eta>0$ は任意であったから，結局，

$$\delta_+ + \delta_- \geq \frac{1}{6}\sin\phi$$

を得る．すなわち，もし $\delta_+ + \delta_- < \frac{1}{6}\sin\phi$ ならば，(3.20) で定義された集合 $F_0(\delta_+, \delta_-, \rho)$ の測度は 0 である．

——(訳者追加)　ところで，(3.19) を満たさない $x\in E$ を考えると，$\delta_+ + \delta_- < \frac{1}{6}\sin\phi$ を満たす正の有理数 δ_+, δ_- と，十分に小さい正の有理数 ρ を見出して，$x\in F_0(\delta_+, \delta_-, \rho)$ が成り立つようにできることがわかる．すなわち，

$$x\in \bigcup_{\substack{\delta_+ + \delta_- < \frac{1}{6}\sin\phi \\ \delta_+, \delta_-, \rho \in \mathbb{Q}^+}} F_0(\delta_+, \delta_-, \rho)$$

であり，明らかに右項は測度 0 の集合である．ゆえに，ほとんどいたるところの $x\in E$ に対して (3.19) が成立する．——　□

系 3.30

E を $\mathbb{R}^2$ 内の非正則な 1 集合とする．このとき，ほとんどいたるところの $x\in E$ に対して，

$$\bar{D}^1(E, x, \boldsymbol{\theta}, \phi) + \bar{D}^1(E, x, -\boldsymbol{\theta}, \phi) \geq \frac{1}{6}\sin\phi > \frac{1}{10}\phi \tag{3.25}$$

が，あらゆる単位ベクトル $\boldsymbol{\theta}$ とあらゆる $0<\phi<\frac{1}{2}\pi$ に対して成立する．

証明　適当に $\{(\boldsymbol{\theta}, \phi)\}$ の稠密な可算部分集合を選ぶと，定理 3.29 より，E 内の測度 0 の集合を除いて，不等式 (3.19) が，この部分集合に属するすべての $(\boldsymbol{\theta}, \phi)$ に対して成立する．ところが，この部分集合に属する点列による近似を考えることにより，同じ不等式 (3.19) が，実はすべての $\boldsymbol{\theta}$ と ϕ に対して成立することを示すことができる．　□

不等式 (3.19) あるいは (3.25) における右辺の $\sin\phi$ の係数 $\frac{1}{6}$ を，もっと大きな値に改良することができる．実際，Besicovitch は補題 3.28 よりもよい評価を用いて，右辺を $\frac{1}{3}\sin\phi$ にできること，さらに $\phi\geq\frac{1}{3}\pi$ の場合には $\frac{1}{2}\sin\phi$ にできることを示した．また，Besicovitch は右辺の $\sin\phi$ の最良の係

数は $2^{-\frac{1}{2}}$ であろうと予想した．(Besicovitch (1928a, 11 節) の与えた例により，この最良の係数は $2^{-\frac{1}{2}}$ よりも大きくはならないことがわかっている.) しかし，最良の係数を求めなくても，系 3.30 から次の接線の非存在に関する結果を導くことができる．

系 3.31

平面内の非正則な 1 集合は，そのほとんどいたるところで接線をもたない．

証明　接線の定義 (3.4) と系 3.30 より明らか．□

すでに見ているように，正則な 1 集合の例としては，長さ有限の曲線の正の測度をもつ可測部分集合を考えればよい．ところが，非正則な 1 集合の例となると，それほど明らかではないだろう．そこで，次にその簡単な例を述べることにしよう．

定理 3.32

$\mathbb{R}^2$ 内に非正則な 1 集合が存在する．

証明　$[0,1)$ 内の実数を 4 進展開し，それを $.x_1x_2\cdots$ と書く．ただし，表現の一意性のために，ある位から無限に 3 が続くような表現はしないものとする．さて，各 i に対し $y_i=5-x_i \pmod 4$ とおき，$[0,1)$ 上の実関数 $f(x)$ を

$$f(.x_1x_2\cdots)=.y_1y_2\cdots$$

によって定義しよう．明らかに f は右連続な関数である．そこで，

$$E=\{(x,f(x)):0\leq x<1\}$$

とおくと，E はカントール集合の直積の形をしたコンパクト集合から可算無限個の点を取り除いた集合であり，明らかにボレル集合になる (図 3.5 参照)．

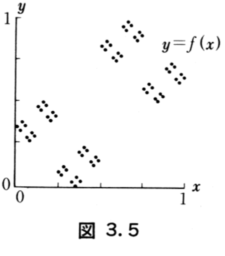


図 3.5

ところで，E を x 軸上へ正射影した集合は $[0,1)$ であるから，明らかに $1\leq\mathcal{H}^1(E)$ が従う．一方，各 k に対し，E は辺の長さが 4^{-k} であるような 4^k 個の正方形に被覆されることから，$\mathcal{H}^1(E)\leq\sqrt{2}$ が従う．ゆえに E は 1 集

合である．また，任意の長さ有限の曲線と E との共通部分は測度 0 となることが容易に確かめられる．したがって，E は Z 集合であり，よって非正則集合であることがわかる．あるいは，x 軸に関して $\pm 45°$ の角度をなすような 2 本の直線へ E を正射影した集合は，ともにルベーグ測度 0 であるという事実から，E の非正則性を導くこともできる．これに関しては，系 6.14 を参照されたい．□

3.5　高次元空間における集合

整数次元をもつ集合の理論を平面から一般の $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 3)$ の場合に拡張するためには，Besicovitch の最初の基本的な論文(1928*a*) から数えて実に 47 年もの歳月を必要とした．というのも，そのためには多くの技術的な難問を解決せねばならなかったからである．例えば，$s=1$ のときに成り立つ次のような定理：有限な $\mathcal{H}^s$ 測度をもつ連続体は測度 0 の集合を除いて長さ有限の曲線の可算和になる，は s が 1 より大きな整数のときにどのように一般化されるのか知られていない．

$\mathbb{R}^n$ 内の s 集合が，**加算有限長**(countably rectifiable) であるとは，その集合が

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} f_j(E_j) \cup G$$

の形に表わされるときにいう．ただし，G は $\mathcal{H}^s$ 測度 0 の集合であり，各 f_j は $\mathbb{R}^s$ 内の有界集合 E_j から $\mathbb{R}^n$ へのリプシッツ写像である．(f がリプシッツ写像であるとは，$|f(t)-f(u)| \leq c|t-u|$ を満たす正定数 c が存在するときにいう．）この定義は，平面の場合に Besicovitch が考察した「Y 集合と測度 0 の集合との和集合」の直接的な拡張になっている．

$\mathbb{R}^n$ 内の s 集合 E が点 x において**接平面**(tangent) をもつとは，$\bar{D}^s(E, x) > 0$ および，任意の角度 $\phi > 0$ に対し，

$$\lim_{r \to 0} r^{-s} \mathcal{H}^s(E \cap (B_r(x) \backslash S(x, \Pi, \phi))) = 0 \tag{3.26}$$

を満たすような，点 x を通る s 次元平面 Π が存在するときにいう．ただし，$S(x, \Pi, \phi)$ は線分 $[y, x]$ が Π に関して ϕ 以下の角をなすような点 $y \in \mathbb{R}^n$ の集

合である．同様にして，Eが点xにおいて**弱接平面**(weak tangent)をもつとは，$\underline{D}^s(E,x)>0$および任意の$\phi>0$に対し，(3.26)式のlimを$\underline{\lim}$で置き換えた式が成り立つような，点xを通るs次元平面Πの存在するときにいう．

定理 3.33

Eを$\mathbb{R}^n$内のs集合(sは整数)とする．このとき，次の3つの命題は互いに同値である．

(a)　Eは正則な集合である，

(b)　Eは可算有限長である，

(c)　Eは，ほとんどいたるところで接平面をもつ．

すでに述べたように，Besicovitch(1928*a*, 1938)はこの定理を$\mathbb{R}^2$内の1集合に対して証明した．Federer(1947)は非常に複雑な方法で(b)と(c)の同値性を示した．このことと接平面の定義を用いて(b)から(a)を導くことができる．(Federerの言う拘束性(restrictedness)は接平面の存在と同値である．)　その後，Moore(1950)は$\mathbb{R}^n$内の1集合に対して定理を示し，Marstrand(1961)は$\mathbb{R}^3$内の2集合に対して定理を示した．そして最終的にはMattila(1975*a*)が$\mathbb{R}^n$内のs集合に対して定理が成り立つことを示したのである．また，一般の測度μに関しても類似の結果が得られている．この場合には，集合の正則性は単に密度$\lim_{r\to\infty} r^{-s}\mu(B_r(x))$が$\mu$に関してほとんどいたるところで存在するという条件によって定義され，値そのものには言及しない．上述のFedererおよびMooreの各論文では，このような一般化も取り扱われている．またMorse & Randolph(1944)は$\mathbb{R}^2$内で$s=1$の場合を考慮しMarstrand(1964)は一般の場合を考察している．特にMarstrandは，一般の測度に対する集合の正則性から，ほとんどいたるところでの弱接平面の存在が導けることを示した．このとき「弱」を省くことができるだろうと予測されている．

これらの結果の証明は，第6章で議論される射影に関する性質の高次元版に密接に関連している．

本章で述べた曲線の理論を$\mathbb{R}^n$内のs次元曲面(sは$1<s<n$なる整数)に拡張するのはかなり困難である．曲線の場合に比べて，一般曲面の理論はかなり

複雑になり，実際，「曲面」とか「面積」といった概念に正確な意味を与えなければならない．

$\mathbb{R}^3$ 内の曲面に関する研究の歴史は古く，曲面積の定義としては，内接多面体の面積の上限(曲線の長さの定義を直接一般化した，いわゆる Lebesgue-Fréchet の定義)が長い間採用されてきた．しかし Besicovitch(1945*b*) は，この定義は測度の加法性という基本性質さえも満たさない不適当なものであることを示した．同時に彼は，曲面積の最適な定義としてハウスドルフ測度 $\mathcal{H}^2$ を提案し，この観点に立って曲面積に関するいろいろな問題に取り組んだのである．

Gołąb の半連続性定理 3.18 をどのように一般曲面に対して一般化したらよいかという問題について考えてみよう．明らかに，直接的に一般化することはできない．というのは，任意の曲面を，長さ有限の曲線列(もちろんその面積は 0 である)によって，ハウスドルフの距離の意味で近似することができるからである．これに関して Besicovitch(1949) は，助変数表示された曲面列 $\{E_j\}$ がある意味でなめらかな助変数表示された曲面 E に収束するならば，$\mathcal{H}^2(E) \leq \underline{\lim}_{j\to\infty} \mathcal{H}^2(E_j)$ が成り立つことを示した．次に，Gołąb の定理の高次元化に関する Vitushkin(1966) の結果を述べよう．また Ivanov(1975) も参照のこと．まず，$\mathbb{R}^n$ のコンパクト集合 E に対する**変分**(variations) を定義しよう．E の連結成分の個数を $V^0(E)$ とおく．例えば，E が連続体であれば $V^0(E)=1$ である．次に，各整数 $1\leq s\leq n$ に対し $V^s(E)=c\int V^0(E\cap \Pi)\mathrm{d}\Pi$ と定める．ここで Π は $n-s$ 次元平面であり，右辺の積分はそのようなすべての平面からなる空間上の(積分幾何に登場する)自然な不変測度に関するものである．また定数 c は n と s のみに依存し，もし E が s 次元立方体であれば $V^s(E)$ はその体積を表わすように選ばれているものとする．このとき，十分になめらかな曲面あるいは多面体を組み合わせた曲面に対しては，V^s はその s 次元体積を表わしている．この変分の概念は，もともと凸集合の研究に用いられていたのであるが，一般のコンパクト集合に対しても十分に有効なのである．さて，Vitushkin の半連続性定理とは，$\mathbb{R}^n$ 内のコンパクト集合の列 $\{E_j\}$ がハウスドルフの距離の意味で E に収束し，さらに各 $0\leq i<s$ に対して $\{V^i(E_j)\}$ が一様有界列であれば $V^s(E)\leq\underline{\lim}_{j\to\infty} V^s(E_j)$ が成立するというものである．$s=1$ の場合が Gołąb の定理である．

特に興味深い問題として，$\mathbb{R}^3$ 内に与えられた閉曲線を境界にもつような面積最小の曲面，いわゆる「極小曲面」を見出す問題(プラトー問題)がある．この問題においても「曲面」をハウスドルフ測度の意味で考えることにより，最終的に Reifenberg(1960) によって肯定的に解決された．(この論文の参考文献は初期の文献を含んでいる．)　これに関しては Besicovitch(1950) の概説を参照されたい．

$\mathcal{L}^n(E)>0$ を満たす $\mathbb{R}^n$ 内の有界なルベーグ可測集合 E に対し，その**密度境界**(density boundary) ∂E を，E に関するルベーグ密度が存在しないか，あるいは存在しても 0,1 以外の値をとるような $\mathbb{R}^n$ 内の点の集合として定めよう．明らかに，Lebesgue の密度定理 1.13 より $\mathcal{L}^n(\partial E)=0$ である．しかし一方で，$\mathcal{H}^{n-1}(\partial E)>0$ を示すことができるが，このことは，E の境界が非常に不規則な場合には明らかではない．

上述した以外にもいろいろな曲面積が考案されている．これに関しては，積分幾何に関連した測度とか Gorgi の周などを詳しく論じている Federer(1969) を参照してもらいたい．

第3章の練習問題

3.1　ψ: $[a,b]\to\mathbb{R}^n$ を有界変動関数(必ずしも連続とは限らない)とする．すなわち，

$$\mathrm{var}[a,b]=\sup\sum_{i=1}^{m}|\psi(t_i)-\psi(t_{i-1})|<\infty,$$

ただし，右辺の上限はあらゆる $[a,b]$ の有限分割 $a=t_0<t_1<\cdots<t_m=b$ にわたるものとする．このとき，$\psi[a,b]$ は，ある(自己交差を許した)長さ有限の曲線に含まれることを示せ．(関数 $\mathrm{var}[a,t]$ を用いて，$[0,\mathrm{var}[a,b]]$ から $\mathbb{R}^n$ への連続関数を定義せよ．)　このことから $\mathcal{H}^1(\psi[a,b])<\infty$ を導け．

3.2　弧状連結な集合は連結であることを示せ．また，$\mathbb{R}^2$ 内の弧状連結でない連続体の例を示せ．(補題 3.12 と比較せよ．)

3.3　ハウスドルフの距離が実際に距離の公理を満たすことを確かめよ．

3.4 ハウスドルフの距離の意味で E に収束しているような $\mathbb{R}^2$ 内の連続体の列 $\{E_j\}$ で，$\mathcal{H}^1(E_j)\to\infty$ かつ $\mathcal{H}^1(E)<\infty$ を満たすような例を与えよ．

3.5 E を $\mathcal{H}^1(E)<\infty$ を満たす連続体とする．このとき，任意の $\varepsilon>0$ に対して $\mathcal{H}^1(E\backslash F)<\varepsilon$ を満たすような樹木集合 $F\subset E$ が存在することを示せ．このことから，E は(自己交差を許した)長さが高々 $2\mathcal{H}^1(E)$ の曲線に含まれることを示せ．

3.6 E を非正則な1集合とする．このとき，任意に固定した $\varepsilon, c>0$ に対して，ある $\delta_0>0$ がとれて，$\mathcal{H}^1(F)<c$ を満たすあらゆる連続体 F に対して，$0<\delta<\delta_0$ ならば $\mathcal{H}^1(E\cap[F]_\delta)<\varepsilon$ が成り立つようにできることを示せ．ただし $[F]_\delta$ は F の δ 平行体である．

3.7 ハウスドルフ次元が2であるような $\mathbb{R}^2$ 内のコンパクト集合 F で，それに含まれるすべての1集合が非正則になるようなものが存在することを示せ．

3.8 $\mathbb{R}^2$ 内の正則な1集合で全不連結になる例を構成せよ．(系3.26と比較せよ．)

4

非整数次元の集合の幾何学的構造

4.1 は じ め に

この章では，s が整数でないときの $\mathbb{R}^n$ 内の s 集合に関する局所的性質を研究する．そのような集合 E は，ほとんどいたるところで真に 1 より小さい下球密度をもつこと，したがって，E は不正則集合になることを示すのが本章の主な目的である．実際，もっと強く，E のほとんどいたるところで密度の存在しないことが示されるであろう．また前章と同様に，接線に関する性質も研究され，ほとんどいたるところで接線の存在しないことが示されるであろう．

平面内の整数でない s に対する s 集合に関する結果は，すべて Marstrand (1954a, 1955) によるものである．（前者の論文には非常にまとまった記述が見られる．） 整数次元の集合の場合と同様に，平面での結果を高次元化するには多くの困難が伴うのであるが，結局 Marstrand (1964) によって自然な一般化が得られたのである．

4.2 $0<s<1$ のときの s 集合

まず最初に，$0<s<1$ のときの $\mathbb{R}^n$ 内の s 集合を考察しよう．この場合は，比較的簡単に，ほとんどいたるところでの密度の非存在という基本的な性質を示

すことができる．

そのような集合の位相的性質についての次の補題をまず示そう．

補題 4.1

$0<s<1$ とする．このとき $\mathbb{R}^n$ 内の s 集合 E は全不連結である．

証明　背理法による．いま E が少なくとも2点 x, y を含む連結成分をもっているとしよう．まず，連続写像 $f: \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ を $f(z) = |z-x|$ によって定める．明らかに f は距離を増加させないから，補題1.8より，$\mathcal{H}^s(f(E)) \leq \mathcal{H}^s(E) < \infty$ を得る．このとき，$s<1$ だから，$f(E)$ は $\mathbb{R}$ 内のルベーグ測度0の集合であり，特にその補集合は稠密である．したがって，$r \notin f(E)$ かつ $0<r<f(y)$ を満たすような数 r を見出すことができる．すると，

$$E = \{z \in E: |z-x| < r\} \cup \{z \in E: |z-x| > r\}$$

は，互いに交わらない2つの(相対位相の意味の)開集合への E の分解を与えている．ところが，点 x は右辺の前者に，点 y は後者に含まれており，x と y が同じ E の連結成分に属していることに反している．　□

次の密度に関する定理の証明は，Marstrand(1954*a*) の与えた証明を少し短くしたものである．

定理 4.2

$0<s<1$ とし，E を $\mathbb{R}^n$ 内の s 集合とする．このとき，ほとんどいたるところの $x \in E$ に対して $D^s(E, x)$ は存在しない．

証明　背理法による．いま，正の測度をもつ E の可測部分集合 E_0 が存在し，その上で E に関する密度が存在しているとしよう．系2.5より，その密度の値は少なくとも $2^{-s} > \frac{1}{2}$ であるとしてよい．このとき，一様化の手法により，ある s 集合 $F \subset E_0$ と十分に小さい正数 ρ を見出して，任意の $x \in F$ と任意の $0<r\leq\rho$ に対して

$$\mathcal{H}^s(E \cap B_r(x)) > \frac{1}{2}(2r)^s \tag{4.1}$$

が成り立つようにできる．さらに $\mathcal{H}^s$ の正則性から，一般性を失うことなく，F は閉集合であるとしてよい．そこで，F の集積点の1つを $y \in F$ とし，$0<\eta<1$ を任意に固定しよう．簡単のために環状領域 $B_{r(1+\eta)}(y) \backslash B_{r(1-\eta)}(y)$ を

$A_{r,\eta}$ と書くと，$r\to 0$ のとき，

$$(4.2)\qquad (2r)^{-s}\mathcal{H}^s(E\cap A_{r,\eta})=(2r)^{-s}\mathcal{H}^s(E\cap B_{r(1+\eta)}(y)) -(2r)^{-s}\mathcal{H}^s(E\cap B_{r(1-\eta)}(y)) \to D^s(E,y)\left((1+\eta)^s-(1-\eta)^s\right)$$

が成り立つ．一方，y は F の集積点であるから，y の十分近くに点 $x\in F$ をとって，$|x-y|=r$ とすれば，

$$B_{\frac{1}{2}r\eta}(x)\subset A_{r,\eta}$$

が成り立つから，(4.1) より

$$\frac{1}{2}r^s\eta^s<\mathcal{H}^s(E\cap B_{\frac{1}{2}r\eta}(x))\leq\mathcal{H}^s(E\cap A_{r,\eta})$$

を得る（図 4.1 参照）．ここで，r はいくらでも小さくなることができるから，(4.2) より

$$2^{-(s+1)}\eta^s\leq D^s(E,y)\left((1+\eta)^s-(1-\eta)^s\right)$$

が従う．さらに，$\eta\to 0$ のとき，右辺$=D^s(E,y)(2s\eta+O(\eta^2))$ であるが，$s<1$ より，これは矛盾である．　□

系 4.3

$0<s<1$ とする．このとき $\mathbb{R}^n$ 内の任意の s 集合は非正則である．

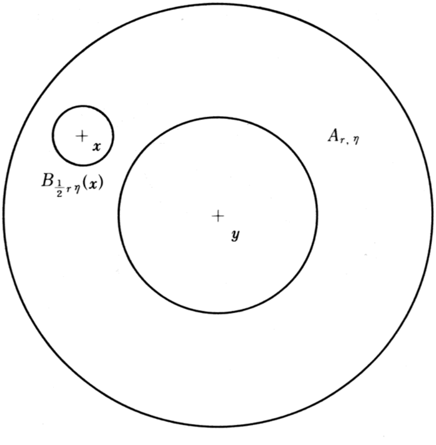


図 4.1

次の下角密度に関する Marstrand(1954a) の結果は，定理 4.2 とほとんど同様の方法によって証明される．

定理 4.4

$0<s<1$ とし，E を $\mathbb{R}^n$ 内の s 集合とする．このとき，任意に固定した単位ベクトル $\boldsymbol{\theta}$ と，任意に固定した角度 $\phi<\frac{1}{2}\pi$ に対して，$\underline{D}^s(E,\boldsymbol{x},\boldsymbol{\theta},\phi)=0$ がほとんどいたるところの $\boldsymbol{x}\in E$ で成り立つ．

証明　背理法による．いま，ある単位ベクトル $\boldsymbol{\theta}$ とある角度 ϕ があって，正の測度をもつ E のある部分集合 E_0 上で $\underline{D}^s(E,\boldsymbol{x},\boldsymbol{\theta},\phi)>0$ が成り立っているとしよう．このとき，一様化の手法により，ある $\rho_0,\alpha>0$ とある正の測度をもつ閉集合 $F\subset E_0$ を見出して，任意の $\boldsymbol{x}\in F$ と任意の $0<r\leq\rho_0$ に対して

$$\mathcal{H}^s(E\cap S_r(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\theta},\phi))>\alpha r^s \tag{4.3}$$

が成り立つようにできる．さて，系 2.4 と 2.5 より，$D^s(E\backslash F,\boldsymbol{y})=0$ および $\bar{D}^s(E,\boldsymbol{y})=c2^{-s}$，ただし $1\leq c<\infty$，を満たすような点 $\boldsymbol{y}\in F$ が存在する．したがって，任意に固定した $\varepsilon>0$ に対し，

$$\mathcal{H}^s((E\backslash F)\cap B_r(\boldsymbol{y}))<\varepsilon r^s \tag{4.4}$$

および

$$\mathcal{H}^s(E\cap B_r(\boldsymbol{y}))<(c+\varepsilon)r^s \tag{4.5}$$

が任意の $0<r\leq\rho_1$ で成り立つような十分に小さい正数 $\rho_1\leq\rho_0$ が存在する．さらに，

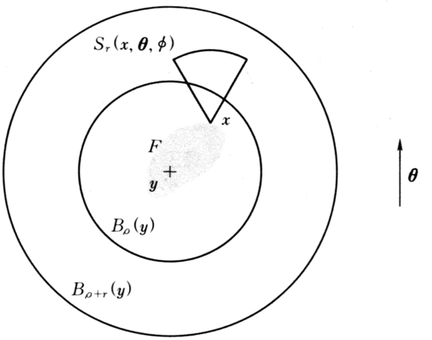


図 4.2

$$(c-\varepsilon)\rho^s < \mathcal{H}^s(E\cap B_\rho(y)) \tag{4.6}$$

を満たすような正数 $\rho\le\frac{1}{2}\rho_1$ も見出すことができる．そこで，内積 $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\theta}$ を最大にするような $F\cap B_\rho(y)$ の点 $\boldsymbol{x}$ を考えよう(図 4.2 参照)．このとき，明らかに，

$$(F\cap B_\rho(y))\cup(F\cap S_r(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\theta},\phi))\subset F\cap B_{\rho+r}(y)$$

であり，点 $\boldsymbol{x}$ を除けば左辺は互いに交わらない集合の和になっている．したがって，

$$\mathcal{H}^s(F\cap B_\rho(y))+\mathcal{H}^s(F\cap S_r(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\theta},\phi))\le\mathcal{H}^s(F\cap B_{\rho+r}(y))$$

が成り立ち，ゆえに

$$\begin{aligned}&\mathcal{H}^s(E\cap B_\rho(y))+\mathcal{H}^s(E\cap S_r(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\theta},\phi))\\&\qquad\le\mathcal{H}^s(E\cap B_{\rho+r}(y))+2\mathcal{H}^s((E\backslash F)\cap B_{\rho+r}(y))\end{aligned}$$

を得る．すると，任意の $0<r\le\rho$ に対し $\rho+r\le\rho_1$ であるから，(4.3)-(4.6) より，

$$(c-\varepsilon)\rho^s+\alpha r^s<(c+\varepsilon)(\rho+r)^s+2\varepsilon(\rho+r)^s$$

が従う．これより，$\nu=r/\rho$ $(0<\nu<1)$ とおけば，

$$c-\varepsilon+\alpha\nu^s<(c+3\varepsilon)(1+\nu)^s$$

を得る．ここで，ν は ε に依存しない数で，$\varepsilon>0$ は任意であったから，結局，

$$c+\alpha\nu^s\le c(1+\nu)^s\le c+cs\nu$$

を得る．ところが，$\nu\to0$ のとき，この不等式は成立しないから矛盾である．　□

上述の証明は，$S_r\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\theta},\frac{1}{2}\pi\right)$ を開半球とみなして角密度を計算するならば，$\phi=\frac{1}{2}\pi$ に対しても有効であることがわかる．このことは，また Besicovitch (1968) によって簡潔に示された $\mathbb{R}$ での片側密度に関する結果の直接的な n 次元への一般化からも導くことができるということを Davies が指摘した．

$0<s<1$ のときの s 集合に関する接線の問題は，特に興味のある問題ではない．というのは，そのような s 集合はあまりに希薄すぎて，直線によって近似するということ自体が意味のあることとは思えないからである．

それでもある意味では，そのような集合に対し接線の存在を議論することができる．つまり，E を $\mathbb{R}$ 内の s 集合$(0<s<1)$とし，なめらかな全単射 ψ: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$ によって定義される $\mathbb{R}^n$ 内のなめらかな曲線を Γ とすれば，$\psi(E)$ は $\mathbb{R}^n$

内の s 集合になり，ほとんどいたるところの $x\in\phi(E)$ に対して，点 x での Γ の接線が，同時に (3.4) の意味で，$\phi(E)$ の点 x における接線になっていることがわかる．

4.3　$s>1$ のときの s 集合

$s>1$ のときの s 集合に対する密度および接線に関する問題は $0<s<1$ の場合に比べてかなり複雑になるので，ここでは平面内の集合に制限して議論しよう．

まず初めに，接線の問題を考察しよう．平面内の s 集合 $(1<s<2)$ に対する接線の性質を研究する1つの方向として，Besicovitch の与えた定理 3.29 の証明を拡張し，各 $\boldsymbol{\theta}$ に対し，$\boldsymbol{\theta}$ 方向と $-\boldsymbol{\theta}$ 方向の上角密度の和がそのほとんどいたるところで正になることを示すという方法が考えられる．実際，Besicovitch の証明は，考えている集合が，あらゆる長さ有限の曲線との共通部分の測度が0になるという性質をもつことに基づいているのであるが，このことは，$s>1$ であるから，補題 3.2 の後に注意したように，いま考えている場合にも成立しているのである．したがって，(3.4) で定義した接線の意味において，平面内の s 集合 $(1<s<2)$ はそのほとんどいたるところで接線をもたないことがわかった．しかしながら，接線に関してもう少し精巧な議論をすることによって，もっと強い結論を導くことができるし，またそれから，密度に関する性質も得ることができる．

さて，Marstrand (1954a) に従って**弱接線** (weak tangent) を定義しよう．$\mathbb{R}^2$ 内の s 集合 E が点 x において $\boldsymbol{\theta}$ 方向に弱接線をもつとは，$\underline{D}^s(E,x)>0$ および任意の $\phi>0$ に対して，

$$(4.7)\qquad \lim_{r\to 0} r^{-s}\mathcal{H}^s(E\cap(B_r(x)\backslash S_r(x,\boldsymbol{\theta},\phi)\backslash S_r(x,-\boldsymbol{\theta},\phi)))=0$$

が成り立つときにいう．（ここで $S_r(x,\boldsymbol{\theta},\phi)$ は，x を端点とする $\boldsymbol{\theta}$ 方向の半直線に関して，x と結んだ線分が ϕ 以下の角度をなすような $B_r(x)$ 内の点の集合であった．）

(3.4) で定義された接線と違い，E が点 x において複数の弱接線をもつことが原理的には可能である．しかし，そのような点 x の集合は測度0になること

が以下に示されるであろう．

補題 4.5

$1<s<2$ とし，E を $\mathbb{R}^2$ 内の s 集合とする．このとき，ほとんどいたるところの $x\in E$ に対して，

$$\bar{D}^s(E,x,\boldsymbol{\theta},\phi)\leq 4\cdot 10^s\phi^{s-1}$$

があらゆる単位ベクトル $\boldsymbol{\theta}$ とあらゆる角度 $0<\phi\leq\frac{1}{2}\pi$ に対して成立する．

証明　任意の $\rho>0$ に対して，

(4.8)　$$F_\rho=\{x\in E\colon \mathcal{H}^s(E\cap B_r(x))<2^{s+1}r^s \text{ が すべての } 0<r\leq\rho \text{ に対して成立する}\}$$

とおく．さらに，$x\in F_\rho$ と $\boldsymbol{\theta}$ と $0<\phi\leq\frac{1}{2}\pi$ を任意に固定して考えよう．各 $i=1,2,\cdots$ に対し，

$$A_i=S_{ir\phi}(x,\boldsymbol{\theta},\phi)\backslash S_{(i-1)r\phi}(x,\boldsymbol{\theta},\phi)$$

とおく．A_i は環状領域と角領域の共通部分である．したがって，$1/\phi\leq m\leq 2/\phi$ を満たす整数 m をとれば，$S_r(x,\boldsymbol{\theta},\phi)\subset\bigcup_1^m A_i\cup\{x\}$ が成り立つ．このとき，明らかに各 A_i の直径は高々 $10r\phi$ だから，もし $r<\rho/20$ ならば，各 A_i の直径は ρ より小さい．ゆえに，F_ρ の点を含むような A_i に対して (4.8) を用いその和をとれば，

$$\mathcal{H}^s(F_\rho\cap S_r(x,\boldsymbol{\theta},\phi))\leq 2\phi^{-1}2^{s+1}(10r\phi)^s,$$

すなわち，

$$(2r)^{-s}\mathcal{H}^s(F_\rho\cap S_r(x,\boldsymbol{\theta},\phi))\leq 4\cdot 10^s\phi^{s-1}$$

を得る．ここで，$r<\rho/20$ は任意であったから，これより $\bar{D}^s(F_\rho,x,\boldsymbol{\theta},\phi)\leq 4\cdot 10^s\phi^{s-1}$ が成り立つ．すると，系 2.4 より，ほとんどいたるところの $x\in F_\rho$ に対して $D^s(E\backslash F_\rho,x)=0$，したがって $\bar{D}^s(E,x,\boldsymbol{\theta},\phi)\leq 4\cdot 10^s\phi^{s-1}$ が成り立つ．

さて，ρ が減少するとき F_ρ は増大することから，$F=\bigcup_{\rho>0}F_\rho$ において，ρ を正の有理数に制限して和をとって差し支えない．したがって，ほとんどいたるところの $x\in F$ に対して補題の成り立つことがわかる．ところで，系 2.5 より，ほとんどいたるところの $x\in E$ に対して $\bar{D}^s(E,x)\leq 1$ が成り立つから，$x\in F_\rho$ を満たす何らかの $\rho>0$ が存在し，ゆえに $E\backslash F$ の測度は 0 である．したがって，ほとんどいたるところの $x\in E$ に対して補題が成り立つ．　□

系 4.6

$1<s<2$ とし，E を $\mathbb{R}^2$ 内の s 集合とする．このとき，E のほとんどいたるところで弱接線は存在しない．

証明　補題4.5より，ほとんどいたるところの $\boldsymbol{x}\in E$ に対して

$$\begin{aligned}\varliminf_{r\to0}(2r)^{-s}\mathcal{H}^s(E\cap(B_r(\boldsymbol{x})\backslash S_r(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\theta},\phi)\backslash S_r(\boldsymbol{x},-\boldsymbol{\theta},\phi)))\\ \geq \underline{D}^s(E,\boldsymbol{x})-\bar{D}^s(E,\boldsymbol{x},\boldsymbol{\theta},\phi)-\bar{D}^s(E,\boldsymbol{x},-\boldsymbol{\theta},\phi)\\ \geq \underline{D}^s(E,\boldsymbol{x})-8\cdot10^s\phi^{s-1}\end{aligned}$$

があらゆる単位ベクトル $\boldsymbol{\theta}$ とあらゆる角度 $0<\phi\leq\frac{1}{2}\pi$ に対して成立する．このとき，もし $\underline{D}^s(E,\boldsymbol{x})>0$ ならば，すべての $\boldsymbol{\theta}$ に対して (4.7) を満たさないような十分に小さい ϕ が存在する．□

$1<s<2$ のときの平面内の s 集合が非正則になることを示すためには，円密度よりまず角密度に関する詳しい考察が必要である．

定理 4.7

$1<s<2$ とし，E を $\mathbb{R}^2$ 内の s 集合とする．すると，任意に $0<\phi<\frac{1}{2}\pi$ を固定するとき，ほとんどいたるところの $\boldsymbol{x}\in E$ に対し，下角密度 $\underline{D}^s(E,\boldsymbol{x},\boldsymbol{\theta},\phi)=0$ を満たすような単位ベクトル $\boldsymbol{\theta}$ が，($\boldsymbol{x}$ に依存して)少なくとも1つ存在する．

証明　任意の正数 α,ρ に対して，

(4.9)
$$F_{\alpha\rho}=\{\boldsymbol{x}:\ \mathcal{H}^s(E\cap S_r(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\theta},\phi))>\alpha r^s \text{ が任意の } 0<r\leq\rho \text{ と任意の単位ベクトル } \boldsymbol{\theta} \text{ に対して成立する}\}$$

とおこう．まず背理法によって，$\mathcal{H}^s(F_{\alpha\rho})=0$ となることを示す．いま可測集合 $F_{\alpha\rho}$ が正の測度をもっているとすれば，系2.5より，ある正の測度をもつような $F_{\alpha\rho}$ の部分可測集合 F と，ある正数 $\rho_1\leq\rho$ が存在して，任意の $\boldsymbol{x}\in F$ と任意の $0<r\leq\rho_1$ に対して，

(4.10)
$$\mathcal{H}^s(E\cap B_r(\boldsymbol{x}))<2^{s+1}r^s$$

が成り立つようにできる．$\mathcal{H}^s$ の正則性から，一般性を失うことなく，F は閉集合であるとしてよい．

さて，系2.4より，F のほとんどいたるところで $E\backslash F$ の円密度は0になることから，そのような点 $\boldsymbol{y}\in F$ を適当に固定すれば，任意の $\varepsilon>0$ に対して，

正数 $\rho_2 \leq \rho_1$ を見出して

$$(4.11)\qquad \mathcal{H}^s((E \backslash F) \cap B_r(y)) < \varepsilon r^s$$

が任意の $0<r\leq\rho_2$ で成り立つようにできる．さて，以後は円板 $B_{\rho_2}(y)$ の内部で考察を続けよう．まず円板 $B_{\frac{1}{2}\rho_2}(y)$ の内部に，集合 F から比較的遠い点が存在することを示そう．すなわち，F から最も遠くにある $B_{\frac{1}{2}\rho_2}(y)$ の点と F との距離を $0<\nu\leq\frac{1}{2}\rho_2$ とおくとき，比 ν/ρ_2 が α と s のみに依存するある定数によって下から評価されることを示すのである．そのためには，$\nu<\frac{1}{4}\rho_2$ の場合に，そうなることを示せば十分である．さて任意の $x\in B_{\frac{1}{2}\rho_2}(y)$ に対して，$B_\nu(x)$ に属する F の点 z が少なくとも1つは存在することから，(4.9) を用いて，任意の $\boldsymbol{\theta}$ に対して，

$$(4.12)\qquad \alpha\nu^s < \mathcal{H}^s(E\cap S_\nu(z,\boldsymbol{\theta},\phi)) \leq \mathcal{H}^s(E\cap B_\nu(z)) \leq \mathcal{H}^s(E\cap B_{2\nu}(x))$$

が成り立つ．一方で，円板 $B_{\frac{1}{2}\rho_2}(y)$ は，1辺が $2^{-\frac{1}{2}}\rho_2$ の正方形を含んでいるから，円板 $B_{\rho_2}(y)$ は，半径が 2ν でその中心が $B_{\frac{1}{2}\rho_2}(y)$ に属しているような，その内部が互いに交わらない小円板を少なくとも $m>(\rho_2/\nu)^2/32$ 個は含んでいなければならない．したがって，このような小円板の和を考えて，(4.12) と (4.10) から，

$$(\rho_2/\nu)^2\alpha\nu^s/32 < \mathcal{H}^s(E\cap B_{\rho_2}(y)) < 2^{s+1}\rho_2^s$$

を得る．この不等式は，まさに α と s のみに依存する正定数 c が存在して，$\nu>c\rho_2$ が成り立つことを示している．以上まとめて，$\nu=\rho_3$ とおけば，

$$(4.13)\qquad \rho_2>\rho_3>c\rho_2$$

を満たす ρ_3 と点 $w\in B_{\frac{1}{2}\rho_2}(y)$ が存在して，円板 $B_{\rho_3}(w)\subset B_{\rho_2}(y)$ の内部が F の点を含まないようにできることがわかった．このとき，$B_{\rho_3}(w)$ の境界は何らかの F の点 v を含んでいることに注意しよう．そこで，$B_{\rho_3}(w)$ に関して点 v における内側法線ベクトルを $\boldsymbol{\theta}$ とし，$\boldsymbol{\theta}$ に関して ϕ の角度をなすような，v を端点とする弦の長さの半分を ρ_4 とする(図4.3参照)．すると，容易にわかるように，

$$(4.14)\qquad \rho_4=\rho_3\cos\phi$$

が成り立つ．また明らかに，$S_{\rho_4}(v,\boldsymbol{\theta},\phi)$ は $B_{\rho_3}(w)$ に含まれているから，v 以外の F の点を含んでいない．ゆえに，(4.11)，(4.13) および (4.14) を用いて，

$$\begin{aligned}(4.15)\qquad \mathcal{H}^s(E\cap S_{\rho_4}(v,\boldsymbol{\theta},\phi)) &= \mathcal{H}^s((E\backslash F)\cap S_{\rho_4}(v,\boldsymbol{\theta},\phi))\\ &\leq \mathcal{H}^s((E\backslash F)\cap B_{\rho_2}(y))\end{aligned}$$

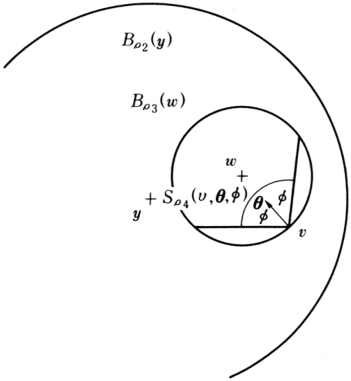


図 4.3

$$<\varepsilon\rho_2^s$$

$$<\varepsilon c_1\rho_4^s$$

を得る．ただし，c_1 は α, s および ϕ のみに依存する定数である．ところが，$v\in F$ および $0<\rho_4<\rho$ であり，$\varepsilon>0$ は任意であったから，(4.15) は $F_{\alpha\rho}$ の定義 (4.9) に反している．ゆえに $\mathcal{H}^s(F_{\alpha\rho})=0$ でなければならない．

さて，α および ρ が減少するとき，集合 $F_{\alpha\rho}$ は明らかに増大することから，結局，集合 $G=\bigcup_{\alpha,\rho>0}F_{\alpha\rho}$ の $\mathcal{H}^s$ 測度も 0 でなければならない．そこで，任意の点 $x\in E\backslash G$ を考えると，$\mathcal{H}^s(E\cap S_r(x,\boldsymbol{\theta},\phi))\leq\alpha r^s$ を満たすようないくらでも小さい正数 α, r と(それに依存して)単位ベクトル $\boldsymbol{\theta}$ の存在することがわかる．したがって，そのような単位ベクトルの列の集積点 $\boldsymbol{\theta}$ を考えるならば，任意の $0<\phi_0<\phi$ に対して，$\underline{D}^s(E,x,\boldsymbol{\theta},\phi_0)=0$ の成り立つことがわかる．□

系 4.8

$1<s<2$ とし，E を $\mathbb{R}^2$ 内の s 集合とする．このとき，ある単位ベクトル $\boldsymbol{\theta}$ が存在して，下角密度 $\underline{D}^s\left(E,x,\boldsymbol{\theta},\frac{1}{2}\pi\right)=0$ がほとんどいたるところの $x\in E$ に対して成立する．

証明　$\frac{1}{2}\pi$ に収束しているような狭義単調増大な正数列を適当に固定し $\{\phi_i\}$ とおく．すると定理 4.7 から，ほとんどいたるところの $x\in E$ に対して，すべ

ての $\boldsymbol{i}$ で $\underline{D}^s(E,x,\boldsymbol{\theta}_i,\phi_i)=0$ が成り立つような単位ベクトル列 $\{\boldsymbol{\theta}_i\}$ が存在する．このとき，部分列を考えることによって，一般性を失うことなく，$i\to\infty$ のとき $\boldsymbol{\theta}_i\to\boldsymbol{\theta}$ としてよい．したがって，任意の $0<\phi<\frac{1}{2}\pi$ に対し $\underline{D}^s(E,x,\boldsymbol{\theta},\phi)=0$ の成り立つことがわかる．さて，x は補題 4.5 の除外点でないとしても差し支えないことから，結局，$\underline{D}^s\left(E,x,\boldsymbol{\theta},\frac{1}{2}\pi\right)=0$ が成り立つのである．□

次に，$\mathbb{R}^2$ 内の s 集合 $(1<s<2)$ の正則点での下角密度を研究し，そのことから，正則な s 集合は存在しないことを導こう．Marstrand (1954 a) による次の巧妙な議論は，粗く言えば，正則点を通るある直線の片側でその集合が希薄であれば，反対側においてもやはり希薄でなければならないということを主張するものである．

補題 4.9

$1<s<2$ とし，E を $\mathbb{R}^2$ 内の s 集合とする．点 x は E の正則点であるとし，その点における E の上凸密度は 1 であるとする．さらに $\underline{D}^s\left(E,x,-\boldsymbol{\theta},\frac{1}{2}\pi\right)=0$ を満たす単位ベクトル $\boldsymbol{\theta}$ が存在するものとする．このとき，E は点 x において，$\boldsymbol{\theta}$ と垂直な弱接線をもつ．

証明　仮定により $D^s(E,x)=\bar{D}^s_c(E,x)=1$ であるから，任意の $\eta>0$ に対して，十分に小さいある正数 ρ を見出して，任意の $0<r\leq\rho$ に対して

$$\mathcal{H}^s(E\cap B_r(x))>2^s r^s(1-\eta), \tag{4.16}$$

さらに $x\in U, 0<|U|\leq 2\rho$ を満たす任意の凸集合 U に対して，

$$\mathcal{H}^s(E\cap U)<(1+\eta)|U|^s \tag{4.17}$$

が成り立つようにできる．また $\underline{D}^s\left(E,x,-\boldsymbol{\theta},\frac{1}{2}\pi\right)=0$ であるから，必要であればさらに小さく ρ を取り直すことによって

$$\mathcal{H}^s\left(E\cap S_\rho\left(x,-\boldsymbol{\theta},\frac{1}{2}\pi\right)\right)<2^s\eta\rho^s \tag{4.18}$$

が成り立つとしてよい．さて $0<\phi<\frac{1}{2}\pi$ を任意に固定して考えよう．まず，点 x を通りベクトル $\boldsymbol{\theta}$ に垂直な直線を L とする．また，点 x を端点とし，$\boldsymbol{\theta}$ に関して ϕ の角度をなす 2 つの半直線を M, M' とする．次に，任意に固定した自然数 m に対して，帰納的に $m+1$ 個の半円 S_{r_i} を次のように定めよう．(ただし，各 S_{r_i} は，中心が x，半径が r_i の半円で，その両端点は直線 L 上に乗

っているように定めるものとする.)　まず $r_0=\rho$ とおいて最初の半円 S_{r_0} を定める. すなわち S_{r_0} は, 点 x 中心, 半径 ρ の円を直線 L で2分した半円である. いま S_{r_i} まで定まっているとしよう. そこで, S_{r_i} の L 上の端点を y_i, y'_i とし, S_{r_i} と M, M' との交点をそれぞれ z_i, z'_i とする(図4.4参照). このとき, 容易に確かめられるように, 線分 $[x, y_i]$ の内部に y_{i+1} をとって, y_i と y_{i+1}, z'_i と y_{i+1} のそれぞれの距離の和がちょうど y'_i と y_{i+1} の距離に等しくなるようにできる. こうして, 中心が x で端点が y_{i+1} になるような半円を S_{r_i} と同じ側に定め, それを $S_{r_{i+1}}$ とするのである. ($S_{r_{i+1}}$ のもう1つの端点を y'_{i+1} とおく.)　以上の定め方から, $\rho=r_0>r_1>\cdots>r_m$ であることがわかる. さて, y_{i+1} を中心に z'_i から弧を描けば, 直線 L と点 y'_{i+1} で交わることがわかる. 同様にして y'_{i+1} を中心に z_i から y_{i+1} まで弧を描く. こうして, このような弧と, S_{r_i} の $z_i z'_i$ 間の部分弧および線分 $[y_{i+1}, y'_{i+1}]$ で囲まれた閉凸集合(図4.4で濃く塗られた部分)を U_i とおくのである. すると明らかに,

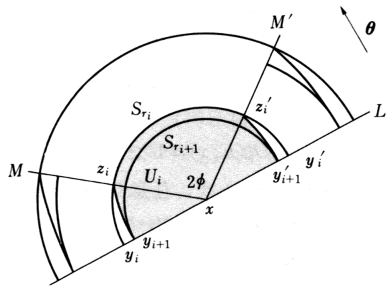


図 4.4

(4.19)
$$|U_i|=2r_{i+1}$$

である. また, 各 $0\le i<m$ に対して,

$$S_{r_i}(x,\boldsymbol{\theta},\phi)\backslash S_{r_{i+1}}(x,\boldsymbol{\theta},\phi)\subset U_i\backslash S_{r_{i+1}}\left(x,\boldsymbol{\theta},\frac{1}{2}\pi\right)$$
$$\subset U_i\cup S_\rho\left(x,-\boldsymbol{\theta},\frac{1}{2}\pi\right)\backslash B_{r_{i+1}}(x)$$

が成り立つから, (4.16)-(4.19) を用いて,

$$\mathcal{H}^s(E\cap S_{r_i}(x,\boldsymbol{\theta},\phi))-\mathcal{H}^s(E\cap S_{r_{i+1}}(x,\boldsymbol{\theta},\phi))$$
$$\le\mathcal{H}^s(E\cap U_i)+\mathcal{H}^s\left(E\cap S_\rho\left(x,-\boldsymbol{\theta},\frac{1}{2}\pi\right)\right)-\mathcal{H}^s(E\cap B_{r_{i+1}}(x))$$

$$
\begin{aligned}
&<(1+\eta)|U_i|^s+2^s\eta\rho^s-2^s r_{i+1}^s(1-\eta)\\
&\le 2^{s+1}\eta r_{i+1}^s+2^s\eta\rho^s\\
&\le 2^{s+2}\eta\rho^s
\end{aligned}
$$

を得る．ゆえに，i について和をとり，(4.17) を用いれば，

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H}^s(E\cap S_\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\theta},\phi)) &< 2^{s+2}\eta\rho^s m+\mathcal{H}^s(E\cap S_{r_m}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\theta},\phi))\\
&< 2^{s+2}\eta\rho^s m+2^s(1+\eta)r_m^s
\end{aligned}
$$

を得る．ところで，以上の構成法から明らかなように，ϕ と m のみに依存する比 r_m/ρ は $m\to\infty$ のときに 0 に収束する．したがって，任意の $\varepsilon>0$ に対して，η には無関係に十分大きな m をとることによって，

$$
\mathcal{H}^s(E\cap S_\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\theta},\phi))<\rho^s(2^{s+2}\eta m+\varepsilon(1+\eta))
$$

が成り立つようにできる．さて，任意に固定した $\eta>0$ と $\phi<\frac{1}{2}\pi$ に対して，この不等式を満たすようないくらでも小さい ρ を見出すことができる．したがって，この評価と (4.18) を用いて，E は点 $\boldsymbol{x}$ において，$\boldsymbol{\theta}$ と垂直方向に(4.7)で定義した意味の弱接線をもつことがわかる． □

系 4.10

$1<s<2$ とする．このとき $\mathbb{R}^2$ 内の任意の s 集合 E は非正則である．

証明 定理 2.3 と系 4.8 より，ほとんどいたるところの $\boldsymbol{x}\in E$ に対し E の上凸密度は 1 であり，また $\underline{D}^s\left(E,\boldsymbol{x},\boldsymbol{\theta},\frac{1}{2}\pi\right)=0$ を満たす単位ベクトル $\boldsymbol{\theta}$ が存在する．したがって，もし E の正則点の集合が正の測度をもっていれば，補題 4.9 より，そのほとんどいたるところで弱接線が存在するはずである．ところが，これは系 4.6 に反している．ゆえに E は非正則集合である． □

Marstrand (1955) は，上述の方法を改良し，$\mathbb{R}^2$ 内の s 集合 $(1<s<2)$ の密度はそのほとんどいたるところで存在しないことを示した．

さて，以上をまとめて，本章の主結果として次の定理を得る．

定理 4.11

平面内の s 集合は，s が整数でなければ非正則である．

証明 系 4.3 と系 4.10 から明らか． □

4.4　高次元空間における集合

定理4.11はそのまま高次元空間に拡張することができる.

定理　4.12

$\mathbb{R}^n$ 内の s 集合は，s が整数でなければ非正則である.

$0<s<1$ の場合は，すでに定理4.2において証明されている．また，系4.10の証明方法を改良して，$n-1<s<n$ の場合を示すことができる．しかしながら，それ以外の非整数 s に対しては，その証明には本質的に新しい方法が必要であり，実際，この定理はMarstrand(1964)によって最終的に証明されたのである．このMarstrandの方法はさらに強く，密度のほとんどいたるところでの非存在を導くことができ，またもっと一般の測度に対して適用することもできる．彼の証明は，正則点での弱接線に関するさらに詳しい考察に基づいているのである.

第4章の練習問題

4.1　定理4.2の証明を応用して，E を $\mathbb{R}^n$ 内の s 集合$(0<s<1)$とするとき，ほとんどいたるところで $\underline{D}^s(E,x)\leq(1+2^{s/(s-1)})^{s-1}$ が成り立つことを示せ.

4.2　E を $\mathbb{R}^n$ 内の s 集合$(0<s<1)$とする．このとき，定理4.4から，任意に固定した単位ベクトル $\boldsymbol{\theta}$ に対し，ほとんどいたるところの $\boldsymbol{x}\in E$ で，下半球密度 $\underline{D}^s\left(E,\boldsymbol{x},\boldsymbol{\theta},\dfrac{1}{2}\pi\right)=0$ が成り立つことを導け(ただし，半円または半球を開集合と考えて，その密度を計算するものとする)．また，$\mathbb{R}^2$ において，半円を閉集合と考えた場合には，もはや上の結果は成り立たなくなるような例を示せ.

4.3　次の定理4.12の特別の場合を示せ：E は $\mathbb{R}^3$ 内の s 集合で，無限回微分可能な，なめらかな曲面上に乗っているものとする．このとき，s が整数でないならば，E は非正則集合である.

5

比較可能な網測度

5.1　網測度の構成

比較可能な**網測度**(net measure)はハウスドルフ測度の研究においてきわめて有効な数学的道具である．実際，この網測度はハウスドルフ測度よりもはるかに便利であり，しかも多くの場合において，ハウスドルフ測度と同等の働きをするのである．Besicovitch(1952)は，最初にこの網測度を用いて，無限大の $\mathcal{H}^s$ 測度をもつような閉集合は必ず s 集合を含むことを証明した．その後，Marstrand(1954*b*)は直積集合上のハウスドルフ測度に関する研究にこれを利用した．本章では，この2つの応用を中心に述べることにする．

ここでは，ユークリッド空間上の網測度の基本形を述べるにとどめる．もっと一般の場合については，Davies と Rogers の研究をまとめた Rogers(1970)の2.7節を参照していただきたい．

ハウスドルフ測度があらゆる集合による被覆を通して定義されるのに対し，網測度の方は，制限された被覆集合族 $\mathcal{N}$ を通して定義される．すなわち，この集合族 $\mathcal{N}$ としては，「網」としての性質，つまり任意の $U_1, U_2 \in \mathcal{N}$ に対して，$U_1 \cap U_2 = \phi$ か $U_1 \subset U_2$ か $U_2 \subset U_1$ のいずれかが必ず成り立つという性質をもつように選ぶのである．さらに，任意の $U \in \mathcal{N}$ に対し，$U \subset V$ を満たす $V \in \mathcal{N}$ は高々有限個しかないという性質も満たすように選ぶものとする．そうすると，任意の $\mathcal{N}$ の部分集合族 $\mathcal{N}_0$ が与えられたとき，他の集合に含まれてい

るような集合があれば，それを取り除くという操作によって，その和集合を変えることなく，互いに交わらない集合からなる$\mathcal{N}_0$の部分集合族を見出すことができる．さて次に，ハウスドルフ測度に対して「比較可能」な網測度を具体的に構成しよう．この比較可能という意味は，2つの測度の比が，集合には依存しない2つの正定数によって上下から評価されるという意味である．

$\mathbb{R}^n$上のs次元網測度$\mathcal{M}^s$を構成するために，まず被覆集合族$\mathcal{N}$をすべてのn次元右半開2進立方体からなる集合族としよう．すなわち，負でない整数kと整数$m_1, \cdots, m_n$に対して，

$$[2^{-k}m_1, 2^{-k}(m_1+1))\times[2^{-k}m_2, 2^{-k}(m_2+1))\times\cdots\times[2^{-k}m_n, 2^{-k}(m_n+1))$$

の形をした$\mathbb{R}^n$の部分集合の全体を$\mathcal{N}$とするのである．（もちろん，$n=1,2$の場合には，$\mathcal{N}$はそれぞれ右半開2進区間あるいは正方形から成り立っている．）このとき，任意の$E\subset\mathbb{R}^n$と$\delta>0$に対し

$$\mathcal{M}^s_\delta(E)=\inf\sum_{i=1}^{\infty}|S_i|^s \tag{5.1}$$

と定める．ただし，右辺の下限は，$\mathcal{N}$に属するあらゆるEのδ被覆$\{S_i\}$にわたるものとする．しかしながら，網としての性質から，Eの被覆としては互いに交わらないような$\mathcal{N}$の部分列を考えるだけで十分である．こうして，$\mathbb{R}^n$内の有界集合に対しては有限値をとるような，$\mathbb{R}^n$上の外測度$\mathcal{M}^s_\delta$を得る．そこで，

$$\mathcal{M}^s(E)=\lim_{\delta\to0}\mathcal{M}^s_\delta(E)=\sup_{\delta>0}\mathcal{M}^s_\delta(E)$$

と定めよう．容易に確かめられるように，$\mathcal{M}^s$は$\mathbb{R}^n$上の距離外測度である．したがって，定理1.5より，ボレル集合は$\mathcal{M}^s$可測である．（さらに，ススリン集合も$\mathcal{M}^s$可測である．）また定理1.6の証明と同様の方法によって，$\mathcal{M}^s$が正則な外測度であることを示すことができる．

次に，以上のようにして構成した測度$\mathcal{M}^s$とハウスドルフ測度$\mathcal{H}^s$が比較可能であることを示そう．これは本質的にBesicovitch(1952)の結果である．

定理 5.1

次元数nのみに依存する正定数b_nが存在して，任意の$E\subset\mathbb{R}^n$と任意の$0<\delta<1$に対して，

$$\mathcal{H}^s_\delta(E)\le\mathcal{M}^s_\delta(E)\le b_n\mathcal{H}^s_\delta(E) \tag{5.2}$$

が成立する．したがって，特に，

(5.3) $$\mathcal{H}^s(E)\leq\mathcal{M}^s(E)\leq b_n\mathcal{H}^s(E)$$

が成り立つ．

証明 ハウスドルフ測度の方が，より広い被覆集合族にわたって下限をとることから，ただちに $\mathcal{H}^s_\delta(E)\leq\mathcal{M}^s_\delta(E)$ を得る．

次に，(5.2) の右側の不等式を示そう．$0<|U|\leq\delta$ を満たす任意の集合 U を考える．このとき，次の不等式

(5.4) $$2^{-k-1}\leq|U|<2^{-k}$$

を満たす整数 k が一意的に定まる．さて，U と交わるような1辺の長さが 2^{-k} の n 次元2進立方体の1つを S とおく．そこで，S および S に隣接するような1辺の長さが 2^{-k} のあらゆる2進立方体を考えれば，そのような 3^n 個の立方体によって U が被覆されていることがわかる．(各立方体の直径は $2^{-k}n^{1/2}$ である．) 次に，各立方体の各辺を 2^n 等分して，合計 2^{n^2} 個の小立方体を考えれば，U が全部で $b_n=3^n2^{n^2}$ 個の小立方体によって被覆されており，その各小立方体の直径は，(5.4) より，

(5.5) $$2^{-k}n^{1/2}2^{-n}\leq2^{1-n}n^{1/2}|U|\leq|U|\leq\delta$$

のように評価される．さて，E の任意の δ 被覆を $\{U_i\}$ とする．このとき，各 i に対して $U_i\subset\bigcup_{j=1}^{b_n}S_{ij}$ を満たすような b_n 個の立方体 $\{S_{ij}\}_{j=1}^{b_n}$ をとることができて，各 S_{ij} の直径は $|U_i|\leq\delta$ 以下にできる．したがって，$E\subset\bigcup_i\bigcup_j S_{ij}$ であり，

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{b_n}|S_{ij}|^s\leq b_n\sum_{i=1}^{\infty}|U_i|^s$$

が成り立つ．ゆえに，$\mathcal{M}^s_\delta$ および $\mathcal{H}^s_\delta$ の定義を考えれば，(5.2) の右側の不等式の成り立つことがわかる．また，$\delta\to0$ とすることによって，(5.3) を得る． □

この節のしめくくりとして，本章の後半に必要となる集合の単調列に関する2つの補題を述べておこう．

補題 5.2

$\{E_j\}$ を $\mathbb{R}^n$ 内の単調減少なコンパクト集合の列とする．このとき，任意の

$\delta>0$ に対して，

$$(5.6)\qquad 2^s\mathcal{H}^s_\delta(\lim_{j\to\infty} E_j) \geq \lim_{j\to\infty} \mathcal{H}^s_{2\delta}(E_j)$$

が成り立つ．

証明　$\lim E_j$ の任意の δ 被覆を $\{U_i\}$ とする．各 i に対し，$|V_i|\leq 2|U_i|$ を満たし U_i を含むような開集合を V_i とする．さらに，開集合 $\bigcup_i V_i$ を V とおく．このとき，ある整数 j が存在して，$E_j\subset V$ が成り立つことを示そう．というのは，もしすべての j に対して $E_j\backslash V$ が空でないとすれば，$\{E_j\backslash V\}$ は空でないコンパクト集合の単調減少列となるから，その極限 $(\lim E_j)\backslash V$ もまた空でないコンパクト集合となって，V が $\lim E_j$ を含んでいることに反するからである．したがって，十分大きな整数 j に対して，

$$2^s\sum|U_i|^s\geq\sum|V_i|^s\geq\mathcal{H}^s_{2\delta}(E_j)\geq\lim_{j\to\infty}\mathcal{H}^s_{2\delta}(E_j)$$

が成り立つ．$\{U_i\}$ は $\lim E_j$ の任意の δ 被覆であったから，(5.6) を得る．□

$\mathbb{R}^n$ 内の単調増大な集合列 $\{E_j\}$ に対しては，補題 1.3 より，$\lim_{j\to\infty}\mathcal{M}^s(E_j)=\mathcal{M}^s(\lim_{j\to\infty}E_j)$ が従う．ところが，この結果は外測度 $\mathcal{M}^s_\delta$ に対しても成立するのである．これは，いわゆる「増大集合列の補題」の特別の場合であって，ハウスドルフ測度の理論においてはかなり重要なものである．詳しくは，Rogers (1970, 2.6 節)，Davies (1970) およびそれらに記載された参考文献を参照していただきたい．ここでは，次の特別な場合を証明するにとどめる．

補題 5.3

各 E_j は n 次元右半開 2 進立方体の有限和であるとし，$\{E_j\}$ は $\mathbb{R}^n$ 内の単調増大列をなしているとする．このとき，任意の $\delta>0$ に対して，

$$\mathcal{M}^s_\delta(\lim_{j\to\infty}E_j)=\lim_{j\to\infty}\mathcal{M}^s_\delta(E_j)$$

が成り立つ．

証明　簡単のために $E=\lim_{j\to\infty}E_j=\bigcup_j E_j$ とおく．各 j に対し $\mathcal{M}^s_\delta(E_j)\leq\mathcal{M}^s_\delta(E)$ であるから，不等式 $\mathcal{M}^s_\delta(E)\leq\lim_{j\to\infty}\mathcal{M}^s_\delta(E_j)$ を，右辺が有限である場合に示せば十分である．さて，各 E_j は 2 進立方体の有限和であるから，容易に確かめられるように，$\mathcal{M}^s_\delta(E_j)$ の定義式における下限は，互いに交わらないような 2 進立方体のある有限和によって実際に達成されることがわかる．そ

こで各 j に対し，そのような E_j の有限 δ 被覆を $\mathcal{T}_j$ とおこう．すなわち，

$$\sum_{C\in\mathcal{T}_j}|C|^s=\mathcal{M}_\delta^s(E_j) \tag{5.7}$$

である．このとき，$\mathcal{T}_j$ としては，そのような被覆の中で最も個数の少ないものが選ばれているものとする．さて，任意の $S\in\mathcal{T}_j$ を考えよう．S は E_j の何らかの点を含んでいなければならないが，この点は同時に E_{j+1} の点でもあるから，この点を含む何らかの $T\in\mathcal{T}_{j+1}$ が存在する．このとき，網としての性質から，S が T の部分集合であるか，あるいは T が S の部分集合であるかの少なくともどちらかが成り立たねばならない．いま，T が S の真部分集合であるとしてみよう．そこで，$\mathcal{T}_j$ に属する 1 つの 2 進立方体 S と，S に含まれ $\mathcal{T}_{j+1}$ に属するような 2 進立方体の和(少なくとも T を含む)を交換することを考えてみる．すると，この交換後も，それぞれが E_j および E_{j+1} の δ 被覆になっていることから，$\mathcal{T}_j$ および $\mathcal{T}_{j+1}$ の定義より，

$$|S|^s=\sum_{\substack{C\in\mathcal{T}_{j+1}\\ C\subset S}}|C|^s$$

が成り立たなければならない．(したがって，右辺は 2 項以上の和である．) ところが，この交換によって，その和を変えることなく，$\mathcal{T}_{j+1}$ の個数を減少させることができるから，これは $\mathcal{T}_{j+1}$ の定義に反している．つまり，T が S の真部分集合になることはない．ゆえに，任意の $S\in\mathcal{T}_j$ に対して，$S\subset T$ を満たす $T\in\mathcal{T}_{j+1}$ の存在することがわかった．こうして，各 $S\in\mathcal{T}_j$ から始まる 2 進立方体の単調増大列を得るが，それらの直径は δ 以下であるから，結局ある番号から先は同一の立方体でなければならない．したがって，各 $S\in\mathcal{T}_j$ に対し $S\subset T$ を満たし，ある番号から先のすべての $\mathcal{T}_k$ に属しているような 2 進立方体 T が存在することがわかる．

さて，$\bigcup_{j=1}^\infty\mathcal{T}_j$ を考えよう．この集合族から，他の立方体に含まれているような立方体があればそれを取り除くことによって，互いに交わらない部分列 $\{C_1, C_2, \cdots\}$ を見出すことができる．このとき明らかに，各 j に対して $E_j\subset\bigcup_{i=1}^\infty C_i$ が成り立つから，$E\subset\bigcup_{i=1}^\infty C_i$ を得る．したがって，

$$\mathcal{M}_\delta^s(E)\le\sum_{i=1}^\infty|C_i|^s \tag{5.8}$$

が従う．ところで，すでに見ているように，各 i に対し，十分大きなすべての j で $C_i\in\mathcal{T}_j$ が成り立つことから，任意の k に対して，すべての $C_1, \cdots, C_k$ が

$\mathcal{I}_{j(k)}$ に属しているような整数 $j(k)$ が存在する．ゆえに，(5.8) と (5.7) より，

$$\mathcal{M}_\delta^s(E) \le \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{k} |C_i|^s \le \lim_{k\to\infty} \sum_{C\in\mathcal{I}_{j(k)}} |C|^s$$
$$= \lim_{k\to\infty} \mathcal{M}_\delta^s(E_{j(k)}) \le \lim_{j\to\infty} \mathcal{M}_\delta^s(E_j)$$

が成り立つ．　□

5.2　有限測度の部分集合

本節での結果は，s 集合が豊富に存在することを示唆するものである．実際に，位相的な意味でかなり多くの $\mathcal{H}^s(E)>0$ を満たす集合 E に対して，E に含まれ $0<\mathcal{H}^s(F)<\infty$ を満たすようなコンパクト集合 F を見出すことができるのである．この結果は，E が σ 有限な $\mathcal{H}^s$ 測度をもつ集合でない場合には決して自明なことではない．(σ 有限な測度をもつ集合とは，測度有限な集合の可算和として表わされるような集合のことである．) Besicovitch (1952) は，閉集合に対して，このような最初の結果を得たが，その直後に Davies (1952*b*) はススリン集合にまで拡張した．

定理 5.4

E は $\mathcal{H}^s(E)=\infty$ を満たすような $\mathbb{R}^n$ 内の閉集合とする．このとき，

(a)　任意の正数 c に対し，$\mathcal{H}^s(F)=c$ を満たすような E のコンパクト部分集合 F が存在する;

(b)　任意の $x\in\mathbb{R}^n$ と任意の $0<r\le 1$ に対して，

$$\mathcal{H}^s(B_r(x)\cap F) \le br^s$$

を満たすような E のコンパクト部分集合 F で，$\mathcal{H}^s(F)>0$ を満たすものが存在する．ただし，b は x および r に依存しない正定数である．

証明　簡単のために，ここでは $n=1$ の場合のみを証明する．一般の場合は 2 進区間を 2 進立方体に置き換えるだけで，全く同様に証明することができる．一般性を失うことなく E は有界集合であるとしてよい．

さて，$\mathcal{M}^s(E)=\infty$ であるから，十分大きな整数 m をとって

$$\mathcal{M}_{2^{-m}}^s(E) \ge 2^s c b_1$$

が成り立つようにできる．ただし，b_1 は定理 5.1 に登場した定数である．まず，E の閉部分集合からなる単調減少列 $\{E_k\}_m^\infty$ を，次のように帰納的に定めよう．まず $E_m=E$ とする．次に，$E_k, k\geq m$, まで定まっているとして，長さ 2^{-k} のすべての 2 進区間との交わりを指定することによって E_{k+1} を定めよう．そこで，任意のそのような 2 進区間を I とする．このとき，もし $\mathcal{M}^s_{2^{-(k+1)}}(E_k \cap I)\leq 2^{-sk}$ が成り立っていれば，単に $E_{k+1}\cap I=E_k\cap I$ とおく．すると，

$$\mathcal{M}^s_{2^{-(k+1)}}(E_{k+1}\cap I)=\mathcal{M}^s_{2^{-k}}(E_k\cap I)\leq 2^{-sk} \tag{5.9}$$

が成り立つ．なぜなら，左側の等式の代わりに不等式 $>$ が成り立っているとすれば，I のみの被覆に対して，$\mathcal{M}^s_{2^{-k}}$ の定義式における下限が達成されることになり，$\mathcal{M}^s_{2^{-k}}(E_k\cap I)=|I|^s=2^{-sk}\geq\mathcal{M}^s_{2^{-(k+1)}}(E_k\cap I)$ となって矛盾になるからである．次に，$\mathcal{M}^s_{2^{-(k+1)}}(E_k\cap I)>2^{-sk}$ が成り立っている場合を考えよう．このとき明らかに，$\mathcal{M}^s_{2^{-(k+1)}}(E_k\cap I\cap(-\infty,u])$ は u の連続で単調増大な関数であるから，ちょうど $\mathcal{M}^s_{2^{-(k+1)}}(E_k\cap I\cap(-\infty,u_0])=2^{-sk}$ を満たす u_0 が I の内部に存在する．そこで，$E_{k+1}\cap I=E_k\cap I\cap(-\infty,u_0]$ とおくのである．この場合，$\mathcal{M}^s_{2^{-k}}(E_k\cap I)=|I|^s=2^{-sk}$ であるから，やはり (5.9) 式が成立している．また，以上のようにして定めた E_{k+1} が閉集合になることも容易に確かめることができる．さて，$\mathcal{M}^s_{2^{-k}}(E_k)$ を考えてみると，E_k を有効に被覆している 2 進区間列は互いに交わっていないとしてよいし，そのような 2 進区間は必ず何らかの長さ 2^{-k} の 2 進区間 I に含まれている．したがって，$\mathcal{M}^s_{2^{-k}}(E_k)$ の値は，I が長さ 2^{-k} のあらゆる 2 進区間をわたるときの $\mathcal{M}^s_{2^{-k}}(E_k\cap I)$ の和に等しい．このことは，$\mathcal{M}^s_{2^{-(k+1)}}(E_{k+1})$ に対しても同様である．ゆえに，(5.9) より，

$$\mathcal{M}^s_{2^{-(k+1)}}(E_{k+1})=\mathcal{M}^s_{2^{-k}}(E_k)$$

が任意の $k\geq m$ に対して成立することがわかる．したがって，

$$\mathcal{M}^s_{2^{-k}}(E_k)=\mathcal{M}^s_{2^{-m}}(E_m) \tag{5.10}$$

が任意の $k\geq m$ に対して成立する．

さて再び，長さ 2^{-k} の任意の 2 進区間 I を考えよう．このとき，任意の $r>k\geq m$ に対して $E_r\subset E_{k+1}$ であるから，(5.9) を用いて，

$$\mathcal{M}^s_{2^{-(k+1)}}(E_r\cap I)\leq\mathcal{M}^s_{2^{-(k+1)}}(E_{k+1}\cap I)\leq 2^{-sk}$$

が従う．ところで，いま $\mathcal{M}^s_{2^{-(k+1)}}(E_r)>\mathcal{M}^s_{2^{-k}}(E_r)$ であるとしてみよう．そうすると，$\mathcal{M}^s_{2^{-(k+1)}}(E_r\cap I_0)>\mathcal{M}^s_{2^{-k}}(E_r\cap I_0)$ を満たすような何らかの長さ 2^{-k} の 2 進区間 I_0 が存在しなければならない．ところが，右辺はまさに $|I_0|^s=2^{-sk}$ で

あるから，上の結果に反している．ゆえに，任意の $r>k\geq m$ に対し，

$$\mathcal{M}^s_{2^{-(k+1)}}(E_r)=\mathcal{M}^s_{2^{-k}}(E_r)$$

が成立し，(5.10) を用いて，結局，任意の $r\geq m$ に対し，

$$\mathcal{M}^s_{2^{-m}}(E_r)=\mathcal{M}^s_{2^{-r}}(E_r)=\mathcal{M}^s_{2^{-m}}(E_m) \tag{5.11}$$

を得る．

以上のようにして構成したコンパクト集合からなる単調減少列 $\{E_k\}_m^\infty$ に対し，$F=\bigcap_m^\infty E_k$ とおく．すると F もコンパクト集合であり，定理 5.1 と (5.10) から，

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^s(F)\leq\mathcal{M}^s(F)&=\lim_{k\to\infty}\mathcal{M}^s_{2^{-k}}(F)\\&\leq\varliminf_{k\to\infty}\mathcal{M}^s_{2^{-k}}(E_k)=\mathcal{M}^s_{2^{-m}}(E_m)<\infty\end{aligned} \tag{5.12}$$

を得る．一方で，補題 5.2，定理 5.1 および (5.11) より，

$$\begin{aligned}2^s\mathcal{H}^s(F)&\geq 2^s\mathcal{H}^s_{2^{-(m+1)}}(F)\geq\lim_{k\to\infty}\mathcal{H}^s_{2^{-m}}(E_k)\\&\geq b_1^{-1}\lim_{k\to\infty}\mathcal{M}^s_{2^{-m}}(E_k)=b_1^{-1}\mathcal{M}^s_{2^{-m}}(E_m)\geq 2^sc\end{aligned}$$

が従い，以上まとめて，

$$c\leq\mathcal{H}^s(F)<\infty$$

を得る．このとき，もし $c<\mathcal{H}^s(F)$ であれば，F の代わりに $F\cap[u,\infty)$ の形の集合を考えれば，測度 $\mathcal{H}^s$ の連続性(定理 1.1)によって，$\mathcal{H}^s(F\cap[u,\infty))=c$ を満たすような u の存在することがわかる．

次に，(a) の証明を応用することによって (b) を示そう．まず適当に正数 c を固定し，(a) に従って，十分に大きな整数 m，コンパクト集合からなる単調減少列 $\{E_k\}_m^\infty$ およびコンパクト集合 F を定めておく．次に，長さが 2^{-r}，$r\geq m$，であるような任意の 2 進区間 J を固定して考えよう．すると，任意の $k\geq r$ に対し，$\mathcal{M}^s_{2^{-k}}(E_k\cap J)$ の値は，I が J に含まれるような長さ 2^{-k} のすべての 2 進区間にわたるときの $\mathcal{M}^s_{2^{-k}}(E_k\cap I)$ の和に等しく，同じことが $\mathcal{M}^s_{2^{-(k+1)}}(E_{k+1}\cap J)$ に対しても成立する．ゆえに，(5.9) より，

$$\mathcal{M}^s_{2^{-(k+1)}}(E_{k+1}\cap J)=\mathcal{M}^s_{2^{-k}}(E_k\cap J)$$

が従い，結局，任意の $k\geq r$ に対して，

$$\mathcal{M}^s_{2^{-k}}(E_k\cap J)=\mathcal{M}^s_{2^{-r}}(E_r\cap J)$$

が成り立つ．したがって，

$$\mathcal{H}^s(F\cap J)\leq\mathcal{M}^s(F\cap J)=\lim_{k\to\infty}\mathcal{M}^s_{2^{-k}}(F\cap J)$$

$$\leq \varliminf_{k\to\infty} \mathcal{M}^s_{2^{-k}}(E_k \cap J) = \mathcal{M}^s_{2^{-r}}(E_r \cap J) \leq \mathcal{M}^s_{2^{-r}}(J) \leq |J|^s$$

を得る．これより，任意の長さ $2^{-k}, k \geq 0$，の閉2進区間 J に対しては，ある m にのみ依存する正定数 a が存在して，

$$\mathcal{H}^s(F \cap J) \leq a|J|^s$$

が成り立つ．

ところで，任意の $x \in \mathbb{R}$ と任意の $0 < r \leq 1$ に対し，$B_r(x)$ に含まれる最大の閉2進区間 J_0 を考えれば，$B_r(x)$ は高々4つの長さ $|J_0|$ の引き続いた閉2進区間の和に含まれていることがわかる．したがって，$|J_0| \leq |B_r(x)| = 2r \leq 4|J_0|$ より，

$$\mathcal{H}^s(B_r(x) \cap F) \leq 4a|J_0|^s \leq br^s$$

を満たすような，m のみに依存する正定数 b が存在する．□

この定理5.4がどのような集合にまで拡張できるのかという自然な問題に対して，Besicovitch (1952) は少なくとも $F_{\sigma\delta\sigma}$ 集合までは正しいことを示した．その後，Davies は，次の結果を導くことによって，上の定理がすべてのススリン集合に対して成立することを示したのである．これに関しては，Davies (1952*b*) あるいは Rogers (1970) を参照していただきたい．

定理 5.5

$\mathcal{H}^s(E) = \infty$ を満たすような $\mathbb{R}^n$ 内の任意のススリン集合 E は，$\mathcal{H}^s(F) = \infty$ を満たす閉部分集合 F を含んでいる．

この定理と定理5.4より，ただちに次の結果を得る．

定理 5.6

E は $\mathcal{H}^s(E) = \infty$ を満たすような $\mathbb{R}^n$ 内のススリン集合とする．このとき，

（a）　任意の正数 c に対し，$\mathcal{H}^s(F) = c$ を満たすような E のコンパクトな部分集合 F が存在する；

（b）　任意の $x \in \mathbb{R}^n$ と任意の $0 < r \leq 1$ に対し，

$$\mathcal{H}^s(B_r(x) \cap F) \leq br^s$$

を満たすような E のコンパクトな部分集合 F で，$\mathcal{H}^s(F) > 0$ を満たすものが

存在する．ただし，b は x および r に依存しない正定数である．

本節の終わりに，σ 有限な $\mathcal{H}^s$ 測度をもたないコンパクト集合 E に関する1つの病的な性質を述べよう．すなわち，そのような集合 E は，それぞれが σ 有限な $\mathcal{H}^s$ 測度をもたないような連続濃度個の部分集合に分解することができる．つまり，それほど E は巨大な集合なのである．これに関しては，Davies (1968) および Rogers(1970, 2.8 節) を参照されたい．

5.3 直積集合

簡単のために，本節では平面内の集合を考察することにするが，本節の結果は容易に高次元に拡張することができる．ここでは，(x, y) は $\mathbb{R}^2$ での直交座標を表わすものとする．$\mathbb{R}^2$ 内の任意の部分集合 E に対し，その第1座標が x であるような E の点全体を E_x と書く．

さて，E を $\mathbb{R}^2$ 内のルベーグ可測集合とする．すると，Fubini の定理によって，E_x はほとんどいたるところの x に対して $\mathcal{L}^1$ 可測であり，

$$\mathcal{L}^2(E)=\int \mathcal{L}^1(E_x)\,\mathrm{d}\mathcal{L}^1(x)$$

が成り立つ．ただし，$\mathcal{L}^1$ および $\mathcal{L}^2$ はそれぞれ1次元および2次元のルベーグ測度である．このとき，これと類似の結果が，非整数次元のハウスドルフ測度に対しても成立するのかという自然な問題が生じる．例えば，x 軸および y 軸上の集合をそれぞれ A および B とするとき，$\mathcal{H}^{s+t}(A\times B)$ と $\mathcal{H}^s(A)\mathcal{H}^t(B)$ は，定数倍を除いて，互いに等しいのであろうか？　実際は，あとで与える例が示すように，これは一般に成立しないのである．それでも，A および B に対する長さ δ の区間による被覆が，直積集合 $A\times B$ に対する1辺の長さ δ の正方形による被覆を導くことを用いて，それらのハウスドルフ測度の間に何らかの関係式を見出せるのではないかと思われるかもしれない．しかし，残念ながら，A の有効な被覆を与えるような区間の長さ δ が，B に対しては有効な被覆を与えないということが起こり得るのである．（もちろん，直積測度 $\mathcal{H}^s\times\mathcal{H}^t$ が何らかのハウスドルフ測度になっている必要は全くない．）しかしながら，s と t のみに依存するような定数 b を用いて，次の不等式

$$\mathcal{H}^{s+t}(A\times B)\geq b\mathcal{H}^{s}(A)\mathcal{H}^{t}(B)$$

を示すことはできる．この不等式は，ある条件のもとで Besicovitch & Moran (1945) によって証明された．その後，Moran (1946, 1949)，Freilich (1950) および Eggleston (1950*a*, 1953*b*) らは密度に基づく証明を与えた．また Eggleston (1950*b*) も参照されたい．しかし，これらの証明はかなり技巧的であるだけでなく，A および B に関してある制限を課している．ところが，次に述べる Marstrand (1954*b*) による網測度を用いた証明は，非常に一般的でしかも簡潔なのである．

まず，組み合わせに関する次の補題を述べよう．

補題 5.7

A を $\mathbb{R}$ 内の任意の部分集合とし，$\{I_i\}$ を 2 進区間による A の可算 δ 被覆とする．さらに，正数列 $\{a_i\}$ と正数 c があって，任意の $x\in A$ に対して，

$$\sum_{\{i\,:\,x\in I_i\}} a_i > c \tag{5.13}$$

を満たしているとする．このとき，

$$\sum_i a_i|I_i|^s\geq c\mathcal{M}^s_\delta(A) \tag{5.14}$$

が成り立つ．

証明　まず $\{I_i\}$ が有限列の場合を考えよう．このとき，各 a_i をほんの少し小さくしても (5.13) 式が成立することから，各 a_i は有理数であるとしてよい．また，それらの共通分母を両辺に掛けることによって，各 a_i は整数であるとしてよい．さらに，被覆列 $\{I_i\}$ において，同一の区間を重複して並べることを許すものとすれば，各 I_i が a_i 個並んでいると考えて，結局すべての i について $a_i=1$ である場合を考察するだけで十分であることがわかる．

さて，正数 c より真に大きい最小の整数を $\lceil c\rceil$ と書くことにすれば，条件式 (5.13) は，各点 $x\in A$ が少なくとも $\lceil c\rceil$ 個の I_i に属していることを意味している．$\{I_i\}$ は網としての性質をもっていることから，互いに交わらないような 2 進区間からなる A の被覆部分列 $\{I_i\}_{i\in\mathcal{I}_1}$ を $\{I_i\}$ から選出して，残った被覆列が A を少なくとも $\lceil c\rceil-1$ 回被覆しているようにできる．したがって，この残った被覆列の中から，互いに交わらないような A の被覆列 $\{I_i\}_{i\in\mathcal{I}_2}$ を選出することができる．以下，同様の操作を続けて，互いに交わらないような 2 進

区間からなる$\lceil c \rceil$個のAの被覆列$\{I_i\}_{i\in\mathcal{I}_j}$，$j=1,2,\cdots,\lceil c \rceil$, を得る．ところで，各$i$について$|I_i|\leq\delta$だから，

$$\sum_{i\in\mathcal{I}_j}|I_i|^s\geq\mathcal{M}_\delta^s(A)$$

が成り立ち，jについて和をとることによって，(5.14) を得るのである．

次に，$\{I_i\}_1^\infty$が無限列の場合を考える．各kに対して，

$$A_k=\Bigl\{x\in\mathbb{R}:\sum_{\substack{i:x\in I_i\\ i\leq k}}a_i>c\Bigr\}$$

とおくと，有限列の場合の結果から，

$$\sum_1^k a_i|I_i|^s\geq C\mathcal{M}_\delta^s(A_k)$$

が成り立つ．ところで，各A_kは2進区間の有限和であり，また明らかに$\{A_k\}$は単調増大列である．さらに，$A\subset\bigcup_k A_k=\lim_{k\to\infty}A_k$であるから，補題5.3より，

$$\sum_1^\infty a_i|I_i|^s\geq c\lim_{k\to\infty}\mathcal{M}_\delta^s(A_k)=c\mathcal{M}_\delta^s(\lim_{k\to\infty}A_k)\geq c\mathcal{M}_\delta^s(A)$$

を得る．□

定理 5.8

Eを平面内の集合とし，Aをx軸上の集合とする．さらに，ある正数cが存在して，任意の$x\in A$に対し$\mathcal{M}^t(E_x)>c$を満たしているとする． このとき，sとtのみに依存する正定数bが存在して，

$$\mathcal{H}^{s+t}(E)\geq bc\mathcal{H}^s(A)$$

が成り立つ．

証明　定理5.1によって，「$\mathcal{H}$」の代わりに「$\mathcal{M}$」に関する不等式を示すだけで十分であることわかる．

任意に固定した$\delta>0$に対し，2進正方形からなる任意のEの$2^{\frac{1}{2}}\delta$被覆を$\{S_i\}_1^\infty$とする．すると，各$x\in A$に対し，

$$E_x\subset\bigcup_1^\infty(S_i)_x$$

が成り立つから，

$$\mathcal{M}_\delta^t(E_x)\leq\sum_1^\infty|(S_i)_x|^t$$

を得る．したがって，$A_\delta=\{x\in A\colon \mathcal{M}_\delta^t(E_x)>c\}$ とおくと，任意の $x\in A_\delta$ に対し，

$$c<\sum_1^\infty |(S_i)_x|^t=2^{-\frac{1}{2}t}\sum_{\{i\,:\,x\in\mathrm{proj}\,S_i\}}|S_i|^t$$

が従う．ただし，proj S_i は正方形 S_i を x 軸上に正射影した，長さが高々 δ の2進区間である．ゆえに，補題5.7において，$I_i=\mathrm{proj}\,S_i$ および $a_i=|S_i|^t$ とおけば，

$$\sum_1^\infty |S_i|^{s+t}=\sum_1^\infty |S_i|^t|S_i|^s=2^{\frac{1}{2}s}\sum_1^\infty|S_i|^t|\mathrm{proj}\,S_i|^s$$
$$\geq 2^{\frac{1}{2}(s+t)}c\mathcal{M}_\delta^s(A_\delta)$$

を得る．ここで，$\{S_i\}$ は E の任意の $2^{\frac{1}{2}}\delta$ 被覆であったから，$b=2^{\frac{1}{2}(s+t)}$ とおいて，

$$bc\mathcal{M}_\delta^s(A_\delta)\leq\mathcal{M}_{2\delta/2}^{s+t}(E)\leq\mathcal{M}^{s+t}(E)$$

が成り立つ．さて，δ が0に減少するとき，明らかに A_δ は増大しながら A に収束することから，任意の $\delta\leq\rho$ に対し，

$$\mathcal{M}_\delta^s(A_\rho)\leq\mathcal{M}_\delta^s(A_\delta)\leq b^{-1}c^{-1}\mathcal{M}^{s+t}(E),$$

したがって，$\delta\to 0$ として，

$$\mathcal{M}^s(A_\rho)\leq b^{-1}c^{-1}\mathcal{M}^{s+t}(E)$$

が任意の $\rho>0$ で成立する．ゆえに，測度 $\mathcal{M}^s$ の連続性により，

$$\mathcal{M}^s(A)\leq b^{-1}c^{-1}\mathcal{M}^{s+t}(E)$$

を得る． □

特に E として直積集合 $A\times B$ をとることによって，ただちに次の系を得る．ただし，右辺において，$0\cdot\infty$ あるいは $\infty\cdot 0$ になる場合はこれを0とみなすものとする．

系 5.9

$\mathbb{R}$ 内の任意の集合 A, B に対して，s と t のみに依存する正定数 b が存在して，

$$\mathcal{H}^{s+t}(A\times B)\geq b\mathcal{H}^s(A)\mathcal{H}^t(B)$$

が成り立つ．

この系5.9より，直積集合のハウスドルフ次元に関する次の結果がただちに導かれる．

系 5.10

$\mathbb{R}$ 内の任意の集合 A, B に対して，

$$\dim(A\times B)\geq \dim A+\dim B$$

が成り立つ．

定理5.8は，$t=0$ の場合(このとき，$\mathcal{H}^t(E_x)$ は集合 E_x の点の個数を表わす)にも成立していることに注意しよう．また，定数 b の値については，Ernst & Freilich(1976) が考察している．

前に述べたように，定理5.8およびその2つの系における不等式を一般に等式で置き換えることはできない．これに関しては，Besicovitch & Moran (1945) および Taylor(1952) が，系5.10における不等式を等式で置き換えることができるための A と B に関する十分条件を求めている．また Besicovitch & Moran(1945) は，系5.9において実際に真の不等号が成り立つような例を与えたが，ここでは彼らの例の代わりに，次のような簡単な例を述べることにしよう．

定理 5.11

ハウスドルフ次元が0であるような $\mathbb{R}$ 内のコンパクト集合 A と B で，$\mathcal{H}^1(A\times B)>0$ を満たすものが存在する．

証明　0に単調減少するような正数列 $\{s_j\}$ を適当に固定し，次の不等式

$$(5.15)\quad \begin{cases} (m_1-m_0)+(m_3-m_2)+\cdots+(m_{2j-1}-m_{2j-2})\leq s_j m_{2j}, \\ (m_2-m_1)+(m_4-m_3)+\cdots+(m_{2j}-m_{2j-1})\leq s_j m_{2j+1} \end{cases}$$

を満たすような，十分に速く増大する整数列 $0=m_0<m_1<m_2<\cdots$ を適当に定めよう．次に，$[0,1)$ 内の数を10進展開し(ただし，表現の一意性のために，ある位から無限に9が続くような表現はしないものとする)，j が奇数のときに $m_j+1\leq r\leq m_{j+1}$ を満たすようなあらゆる r に対して，小数点以下 r 位の数字が0であるような $[0,1)$ 内の数の全体を A とおく．同様に，j が偶数のときに $m_j+1\leq r\leq m_{j+1}$ を満たすようなあらゆる r に対して，小数点以下 r 位の数

字が0であるような $[0,1)$ 内の数の全体を B とおく．このように，カントール集合の場合と類似の構成法によってコンパクト集合 A と B を定めるのである．すると，容易に確かめられるように，集合 A は 10^k 個の長さ $10^{-m_{2j}}$ の閉区間によって被覆される．ただし，

$$k=(m_1-m_0)+(m_3-m_2)+\cdots+(m_{2j-1}-m_{2j-2})$$

である．したがって，(5.15) を用いて，任意の $s>0$ に対して $\mathcal{H}^s(A)=0$ の成り立つことがわかる．同様にして $\mathcal{H}^s(B)=0$ も成り立つ．

さて，平面から $y=x$ で表わされる直線 L 上への正射影を proj とする．すると明らかに $\mathrm{proj}(x,y)$ は原点からの（符号付きの）距離が $2^{-\frac{1}{2}}(x+y)$ であるような L 上の点である．次に，任意に固定した $u\in[0,1)$ の10進展開において，u と x の小数点以下 $m_{2j}+1$ 位から m_{2j+1} 位までの数字がすべての j に対して一致するような A の要素 x と，同様にして u と y の小数点以下 $m_{2j-1}+1$ 位から m_{2j} 位までの数字がすべての j に対して一致するような B の要素 y を考えると，明らかに $u=x+y$ が成り立つ．このことから，$\mathrm{proj}(A\times B)$ は L 上の長さ $2^{-\frac{1}{2}}$ の閉区間であることがわかる．ところで，正射影は距離を増加させない写像であるから，補題1.8より，

$$2^{-\frac{1}{2}}=\mathcal{H}^1(\mathrm{proj}(A\times B))\leq\mathcal{H}^1(A\times B)$$

が従うのである．　□

本節における結果の一般化については，Larman (1967*a*) および Wegmann (1969*a*, 1969*b*, 1971*a*) が非常に一般的な空間における直積集合を考察している．特に，系5.9の証明とほとんど同様にして，次のような高次元版を得る．

定理 5.12

任意の $A\subset\mathbb{R}^n$ と $B\subset\mathbb{R}^m$ に対し，($A\times B\subset\mathbb{R}^{n+m}$ と考えて) ある正定数 b が存在して，

$$\mathcal{H}^{s+t}(A\times B)\geq b\mathcal{H}^s(A)\mathcal{H}^t(B)$$

が成り立つ．

$\mathbb{R}^2$ 内の1次元部分集合 E と，$\mathbb{R}$ 内の単位区間 I に対し，$E\times I$ という形の $\mathbb{R}^3$ 内の部分集合を**柱集合** (cylinder set) という．これに関して Randolph

(1936) は，どのような E に対して

$$\mathcal{H}^1(E)=\frac{1}{4}\pi\mathcal{H}^2(E\times I)$$

が成り立つのかという問題を提起した．ここで，右辺の係数 $\frac{1}{4}\pi$ は $\mathcal{L}^2$ と $\mathcal{H}^2$ の比である(定理 1.12)．つまり，どのような E にまで，「面積＝底辺×高さ」という公式が拡張できるのかと問うているわけである．これに関しては，Besicovitch & Moran (1945)，Freilich (1965)，Ward (1967) および Larman (1967c) を参照のこと．

第 5 章の練習問題

5.1　E を $\mathbb{R}$ 内の s 集合とし，I を単位区間とする．このとき，$E\times I$ は $\mathbb{R}^2$ 内の部分集合とみて $s+1$ 集合になることを示せ．

5.2　E を $\mathbb{R}^2$ 内のボレル集合とする．このとき，

$$\mathcal{H}^{s+t}(E)\geq b\int\mathcal{H}^t(E_x)\,\mathrm{d}\mathcal{H}^s(x)$$

が成り立つことを示せ．ただし，b は定理 5.8 に登場した定数である．

5.3　各 E_j は，互いに交わらないような長さの等しい有限個の閉区間 U_i の和で，$|U_i|\leq\delta$ かつ $\sum|U_i|^s\leq c$ を満たしているとする．ただし，δ は j に依存する正数で，$j\to\infty$ のとき $\delta\to 0$ であるとし，c は j に依存しない正数とする．さらに，$\{E_j\}$ は単調減少な集合列であるとし，カントール型の集合 $E=\bigcap_1^\infty E_j$ は $\mathbb{R}$ 内の s 集合であるとする．このとき，E の差集合 $F=\{x-y\colon x,y\in E\}$ に対し，$\dim F\leq 2\dim E$ が成り立つことを示せ．(直積集合 $E\times E$ から $x+y=0$ で表わされる直線上への正射影を考えよ．)

5.4　$G=\{(x,y)\colon y-x$ は無理数である$\}\subset\mathbb{R}^2$ とおく．このとき，G の補集合の 2 次元ルベーグ測度は 0 であるにもかかわらず，正の 1 次元ルベーグ測度をもつようないかなる可測集合 A と B をとってきても，G は $A\times B$ という形の集合を含まないことを示せ．(練習問題 1.7 の結果を用いよ．)

6

射影に関する性質

6.1 はじめに

この章では，平面内の s 集合 E の直線上への正射影のハウスドルフ次元を t とおくとき，ほとんどすべての方向の直線に対して，$s\leq 1$ であれば $t=s$, $s\geq 1$ であれば $t=1$ となることを示す．もっと一般に，$\mathbb{R}^n$ 内の k 次元部分空間 Π に対し，$\mathbb{R}^n$ から Π 上への正射影を proj_Π と書くとき，E 自身と $\mathrm{proj}_\Pi E$ のハウスドルフ測度の関係を研究する．まず，両者の間の明らかな不等式を述べよう．

補題 6.1

E を $\mathbb{R}^n$ 内の任意の部分集合とし，Π を $\mathbb{R}^n$ 内の任意の部分空間とする．このとき，

$$\mathcal{H}^s(\mathrm{proj}_\Pi E)\leq \mathcal{H}^s(E)$$

が成り立つ．

証明　正射影は距離を増加させない写像である．すなわち，任意の $x, y\in E$ に対して $|\mathrm{proj}_\Pi(x)-\mathrm{proj}_\Pi(y)|\leq|x-y|$ が成り立つ．したがって，補題 1.8 より明らかである．　□

本章では，したがって，この補題の不等式とは逆向きの不等式を考察するわ

けである．s が一般の場合の s 集合 E に対しては，Marstrand(1954a) による幾何学的証明ではなくて，ここでは集合の容量を用いた方法を述べることにする．また，s が整数である特別な場合の s 集合 E に対しては，Besicovitch (1939) の幾何学的方法によって，E が正則の場合と非正則の場合とで著しい差異が見られることを示そう．

6.2　ハウスドルフ測度と容量

この節では，ハウスドルフ測度と容量という解析学における異なる2つの概念を関係付けることによって，s 集合の正射影を研究する方法を確立する．

集合の容量はもともと静電学に起源をもつ概念であるが，この理論はポテンシャル論において深く研究され，重要な役割を演じている．Frostman は，彼の有名な学位論文(1935) において，容量に関する初期の主要な結果を定式化した．(これに関しては Taylor(1961)，Carleson(1967)，Hayman & Kennedy (1976) あるいは Hille(1973) を参照のこと．）以下に，ハウスドルフ次元と容量との関係を述べるのであるが，集合の容量を考察する方が都合のよいことが多い．

ボレル測度 μ の**台**(support)とは，S 上で恒等的に0になるような任意の連続関数 f に対して $\int f\,\mathrm{d}\mu=0$ が成り立つような最小の閉集合 S のことであり，これを $\mathrm{supp}\,\mu$ と書く．粗く言えば，台とは測度 μ がその上に集中しているような集合のことである．

次に，測度と線形汎関数を同一視する有名な Riesz の表現定理を述べよう．(詳しくは Kingman & Taylor(1966, 9.5節) あるいは Rudin(1970, 第2章) を参照されたい.）$\mathcal{F}$ を $\mathbb{R}^n$ 内のコンパクト集合 S 上のすべての連続関数からなる空間とする．このとき，$\phi: \mathcal{F}\to\mathbb{R}$ が $\mathcal{F}$ 上の**正の線形汎関数**(positive linear functional)であるとは，任意の $\lambda_1, \lambda_2\in\mathbb{R}$ と任意の $f_1, f_2\in\mathcal{F}$ に対して

$$\phi(\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2)=\lambda_1\phi(f_1)+\lambda_2\phi(f_2),$$

かつ，すべての点 $x\in S$ で $f(x)\geq 0$ を満たすような任意の $f\in\mathcal{F}$ に対して，

$$\phi(f)\geq 0$$

が成り立つときにいう．明らかに，S 上の有限なボレル測度 μ に対して，

$\phi(f)=\int_S f\,\mathrm{d}\mu$ は $\mathcal{F}$ 上の正の線形汎関数を定めている．この逆も正しいことを主張するのが，次の Riesz の表現定理である．

定理 6.2 (Riesz の表現定理)

S を $\mathbb{R}^n$ 内のコンパクト集合とし，ϕ を S 上の連続関数全体からなる空間 $\mathcal{F}$ 上の正の線形汎関数とする．このとき，$\mu(S)<\infty$ を満たし，台が S に含まれるようなボレル測度 μ が存在して，

$$\phi(f)=\int_S f\,\mathrm{d}\mu$$

がすべての $f\in\mathcal{F}$ に対して成り立つ．

さて，$0<\mu(\mathbb{R}^n)<\infty$ を満たし，コンパクトな台をもつような $\mathbb{R}^n$ 上のボレル測度 μ を**質量分布**(mass distribution)という．このとき，質量分布 μ の点 x における **t ポテンシャル**(t-potential)を

$$\phi_t(x)=\int\frac{\mathrm{d}\mu(y)}{|x-y|^t}$$

によって定義する．また，μ の **t エネルギー**(t-energy)を

$$I_t(\mu)=\int\phi_t(x)\,\mathrm{d}\mu(x)=\iint\frac{\mathrm{d}\mu(x)\,\mathrm{d}\mu(y)}{|x-y|^t} \tag{6.1}$$

によって定義する．さらに $\mathbb{R}^n$ 内のコンパクト集合 E の **t 容量**(t-capacity)を

$$C_t(E)=\sup_{\mu}\left\{\frac{1}{I_t(\mu)}:\mu\text{ は }E\text{ を台にもち，}\mu(E)=1\text{ を満たす}\right\} \tag{6.2}$$

によって定義する．(ポテンシャルおよびエネルギーは ∞ の値をとりうることに注意しよう．その場合は $1/\infty=0$ と考える．) 最後に，$\mathbb{R}^n$ 内の任意の部分集合 E に対する t 容量を

$$C_t(E)=\sup\{C_t(F):F\text{ は }E\text{ に含まれるコンパクト集合}\} \tag{6.3}$$

によって定義しよう．

この容量は，場合により多少異なって定義されることがあるけれども，容量が 0 の集合は定義によらないという重要な意味において，それらの定義は同値である．ポテンシャル論における基本的な結果より，(6.2) の定義は次の定義

$$C_t(E)=\sup_{\mu:\mu(E)=1}\left(\sup_{x\in\mathrm{supp}\,\mu}\{\mu\text{ の点 }x\text{ における }t\text{ ポテンシャル}\}\right)^{-1}$$

と同値であること，またこれらの定義における上限は実際に達成されることが

知られている．しかし，これらの結果はここでは用いない．詳しくは，例えば Hayman & Kennedy (1976) を参照していただきたい．

定義より明らかに，任意の t に対して，$E \subset E'$ ならば $C_t(E) \leq C_t(E')$ が成り立つ．また質量分布 μ が $I_t(\mu)=\infty$ を満たせば，任意の $s>t$ に対し $I_s(\mu)=\infty$ が成り立つ．したがって，もし $C_t(E)=0$ ならば，任意の $s>t$ に対し $C_s(E)=0$ が成り立つことがわかる．

また定義より次の基本性質がただちに従う：$C_t(E)>0$ であることと，台が E に含まれ $I_t(\mu)<\infty$ を満たすような質量分布 μ が存在することとは同値である．

補題 6.3

E は $\mathcal{H}^s(E)<\infty$ を満たすような $\mathbb{R}^n$ 内のコンパクト集合であるとし，また μ は E を台にもつような質量分布であるとする．このとき，

$$F_0=\{x \in E\colon \lim_{r\to 0} \mu(B_r(x))/r^s=0\}$$

とおけば，$\mu(F_0)=0$ が成り立つ．

証明　任意の $\alpha, \rho>0$ に対し，

$$F_{\alpha\rho}=\{x \in E\colon \text{すべての } 0<r\leq\rho \text{ に対し } \mu(B_r(x))/r^s<\alpha \text{ が成り立つ}\}$$

とおこう．まず，$0<\delta\leq\rho$ なる δ に対し，ボレル集合 $F_{\alpha\rho}$ の任意の δ 被覆 $\{U_i\}$ を考える．このとき，各 U_i は何らかの $F_{\alpha\rho}$ の点を含んでいるとしてよい．したがって，各 i について，$F_{\alpha\rho}$ の点を中心とする閉球 B_i で，$|B_i|\leq 2|U_i|\leq 2\rho$ かつ $U_i\subset B_i$ を満たすものが存在する．ゆえに，

$$\mu(F_{\alpha\rho})\leq \sum_i \mu(B_i)<2^{-s}\alpha\sum_i |B_i|^s\leq\alpha\sum_i |U_i|^s$$

が成り立つ．ここで，$\{U_i\}$ および $\delta>0$ は任意であったから，$\mu(F_{\alpha\rho})\leq\alpha\mathcal{H}^s_\delta(F_{\alpha\rho})$，したがって $\mu(F_{\alpha\rho})\leq\alpha\mathcal{H}^s(F_{\alpha\rho})\leq\alpha\mathcal{H}^s(E)$ を得る．ところが，α が減少するとき，あるいは ρ が増大するとき，明らかに $F_{\alpha\rho}$ は減少し，また

$$F_0=\bigcap_{\alpha>0}\bigcup_{\rho>0}F_{\alpha\rho}$$

であるから，任意の $\alpha>0$ に対して，測度の連続性から，

$$\mu(F_0)\leq\mu\Bigl(\bigcup_{\rho>0}F_{\alpha\rho}\Bigr)=\lim_{\rho\to 0}\mu(F_{\alpha\rho})\leq\alpha\mathcal{H}^s(E)$$

が成り立つ．ゆえに $\mu(F_0)=0$ を得る．　□

さて，いよいよハウスドルフ測度と容量の基本的な関係を述べよう．次の定理 6.4 の（a）は，比較可能な網測度の初期の形を用いて，Frostman(1935) が証明したものである．これについては Wallin(1969) も参照のこと．（b）の方は，Erdös & Gillis(1937) によって証明され，その後 Ugaheri(1942) および Kametani(1945) によって一般化された．

定理 6.4

（a） $\mathbb{R}^n$ 内のススリン集合 E が $C_t(E)=0$ を満たせば，任意の $s>t$ に対し $\mathcal{H}^s(E)=0$ が成り立つ；

（b） $\mathbb{R}^n$ 内の部分集合 E が $\mathcal{H}^s(E)<\infty$ を満たせば，$C_s(E)=0$ が成り立つ．

証明 （a） この命題の対偶，すなわち，ススリン集合 E が $\mathcal{H}^s(E)=\infty$ を満たせば，任意の $t<s$ に対し $C_t(E)>0$ が成り立つことを示そう．そのためには，E のコンパクトな部分集合を台にもち，$I_t(\mu)<\infty$ を満たすような質量分布 μ を見出せば十分である．

まず，定理 5.6 の（b）より，$0<\mathcal{H}^s(F)<\infty$ を満たすようなコンパクト集合 $F\subset E$ が存在して，任意の $x\in\mathbb{R}^n$ と任意の $0<r\leq 1$ に対し，

$$\mathcal{H}^s(B_r(x)\cap F)\leq br^s$$

が成り立つ．ただし，b は x にも r にも依存しない正定数である．次に，測度 $\mathcal{H}^s$ を F に制限したものを μ とおく．明らかに，μ は F のコンパクトな部分集合を台にもつような質量分布である．さて，任意に $x\in\mathbb{R}^n$ を固定しよう．このとき，任意の $0<r\leq 1$ に対して，

$$\mu(B_r(x))=\mathcal{H}^s(B_r(x)\cap F)\leq br^s \tag{6.4}$$

が成り立っている．簡単のために，左辺の r の関数を $m(r)$ とおけば，任意の $t<s$ に対して，

$$\begin{aligned}\phi_t(x)&=\int_{|x-y|\leq 1}\frac{\mathrm{d}\mu(y)}{|x-y|^t}+\int_{|x-y|>1}\frac{\mathrm{d}\mu(y)}{|x-y|^t}\\&\leq\int_0^1 r^{-t}\,\mathrm{d}m(r)+\mu(\mathbb{R}^n).\end{aligned}$$

ここで，部分積分と (6.4) から，

$$\text{右辺}=[r^{-t}m(r)]_{0+}^1+t\int_0^1 r^{-(t+1)}m(r)\,\mathrm{d}r+\mu(\mathbb{R}^n)$$

$$\leq b+bt\int_0^1 r^{s-t-1}\,\mathrm{d}r+\mu(\mathbb{R}^n)$$
$$=b(1+t/(s-t))+\mathcal{H}^s(F)$$

を得る．こうして，$\phi_t(x)$ は $\mathbb{R}^n$ 上有界な x の関数であるから，

$$I_t(\mu)=\int\phi_t(x)\,\mathrm{d}\mu(x)<\infty$$

が従うのである．

（b）　定義 (6.3) より，E がコンパクト集合の場合に示せば十分である．すなわち，コンパクト集合 E を台にもつような任意の質量分布 μ に対して，$I_s(\mu)=\infty$ となることを示そう．まず．

$$E_0=\{x\in E\colon \overline{\lim_{r\to 0}}\,\mu(B_r(x))/r^s>0\}$$

とおく．すると，任意に固定した $x\in E_0$ に対して，0 に単調減少する正数列 $\{r_i\}$ とある $\varepsilon>0$ が存在して，

$$\mu(B_{r_i}(x))\geq\varepsilon r_i^s$$

が成り立つ．さて，もし $\mu(\{x\})>0$ ならば，明らかに，任意の正数 c に対して $I_s(\mu)\geq c(\mu(\{x\}))^2$ が成り立つから $I_s(\mu)=\infty$ を得る．したがって $\mu(\{x\})=0$ の場合を考えればよい．この場合は，μ の連続性から，各 i について $A_i=B_{r_i}(x)\backslash B_{q_i}(x)$ とおくとき，

$$\mu(A_i)\geq\frac{1}{2}\varepsilon r_i^s$$

を満たすような $0<q_i<r_i$ が存在する．一般性を失うことなく，各 i について $r_{i+1}<q_i$ としてよい．こうして，互いに交わらない環状領域列 $\{A_i\}$ を得る．すると，

$$\phi_s(x)=\int\frac{\mathrm{d}\mu(y)}{|x-y|^s}\geq\sum_i\int_{A_i}\frac{\mathrm{d}\mu(y)}{|x-y|^s}\geq\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2}\varepsilon r_i^s r_i^{-s}=\infty$$

が成り立つ．ところが，補題 6.3 より，E の (μ に関して) ほとんどいたるところの点は E_0 に属しているから，$\mu(E_0)>0$ を得る．ゆえに，

$$I_s(\mu)=\int\phi_s(x)\,\mathrm{d}\mu(x)=\infty$$

が成り立つ．ここで，μ は E を台にもつような任意の質量分布であったから，$C_s(E)=0$ を得るのである．　□

系 6.5

E を $\mathbb{R}^n$ 内の任意のススリン集合とする．このとき，

$$\dim E=\inf\{t: C_t(E)=0\}=\sup\{t: C_t(E)>0\}.$$

証明 簡単のために $c=\inf\{t: C_t(E)=0\}=\sup\{t: C_t(E)>0\}$ とおく．すると，定理 6.4 の（a）より，任意の $s>c$ に対して $\mathcal{H}^s(E)=0$ が成り立つから，(1.14) より，$\dim E\leq c$ を得る．一方，定理 6.4 の（b）の対偶をとって，$C_s(E)>0$ ならば，$\mathcal{H}^s(E)=\infty$ が成り立つ．すなわち，任意の $s<c$ に対して $\mathcal{H}^s(E)=\infty$ が成り立つことから，(1.14) より，$c\leq\dim E$ を得る．ゆえに $c=\dim E$ である． □

系 6.5 は，次のような形で用いられることも多い．

系 6.6

E を $\mathbb{R}^n$ 内のススリン集合とする．このとき，

（a） 台が E に含まれ $I_t(\mu)<\infty$ を満たすような質量分布 μ が存在すれば，$t\leq\dim E$ が成り立つ;

（b） 逆に $t<\dim E$ ならば，台が E に含まれ $I_t(\mu)<\infty$ を満たすような質量分布 μ が存在する．

ハウスドルフ測度と容量は完全に同値な概念ではないことに注意しておこう．すなわち，$\dim E=t$ とおくとき，$C_t(E)$ と $\mathcal{H}^t(E)$ の比はいろいろな値をとりうるのである．これに関するいくつかの例については，Garnett (1970) あるいは Mattila (1985) を参照されたい．

フーリエ変換は，ポテンシャル論においてきわめて重要な役割を果たしている．(変換理論の一般的な取り扱いについては Rudin (1973) を参照のこと．) しかし，ここではフーリエ変換の定義および 2 乗可積分関数のフーリエ変換に関する Plancherel の定理から導かれる 1 つの補題を述べるにとどめよう．まず，$\mathbb{R}$ 上の可積分関数 f と質量分布 μ に対する（1 次元）**フーリエ変換**(Fourier transform) は，それぞれ

$$\begin{cases} \hat{f}(p)=(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\displaystyle\int f(u)\mathrm{e}^{\mathrm{i}up}\,\mathrm{d}u, \\ \hat{\mu}(p)=(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\displaystyle\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}up}\,\mathrm{d}\mu(u), \end{cases}$$

ただし $p\in\mathbb{R}$, によって定義される．このとき，明らかに $\hat{f}$ および $\hat{\mu}$ は有界な連続関数であることがわかる．

補題 6.7

μ は $\mathbb{R}$ 上の質量分布で

$$0<\int|\hat{\mu}(p)|^2\,\mathrm{d}p<\infty$$

を満たしているとする．このとき，μ の台は正のルベーグ測度をもつ．

証明　Plancherel の定理により，フーリエ変換は2乗可積分関数からなる空間上の等長変換である．そこで，$\hat{\mu}(p)$ のフーリエ変換を $g(u)$ と書けば，

$$0<\int|\hat{\mu}(p)|^2\,\mathrm{d}p=\int|g(u)|^2\,\mathrm{d}u<\infty \tag{6.5}$$

が成り立つ．一方，ある有界区間以外は恒等的に0であるような任意の連続関数 f に対して，

$$\int f(u)\,\mathrm{d}\mu(u)=\int f(u)g(u)\,\mathrm{d}u \tag{6.6}$$

の成り立つことがわかる．さて，μ の台を E とおき，E を含むような任意の閉区間 J を考えよう．すると，(6.6) から，E 上および J の外で恒等的に0になるような任意の連続関数 f に対して $\int fg\,\mathrm{d}\mu=0$ が成り立つ．したがって，J における E の補集合上ではほとんどいたるところで $g(u)=0$ でなければならない．ここで，J は E を含む任意の閉区間であったから，結局，E の補集合のほとんどいたるところで $g(u)=0$ が成り立つ．ところで，もし E のルベーグ測度が0であれば，$g(u)=0$ がほとんどいたるところの $u\in\mathbb{R}$ で成り立つことになり，(6.5) に反している．ゆえに，$\mathcal{L}^1(E)>0$ でなければならない．　□

6.3　一般次元の集合の射影

この節では，次元が一般の場合の集合の射影に関する最も重要な結果を述べよう．この種の最初の結果は，Marstrand (1954*a*) によって容量を用いずに直接に証明された．ここで述べるポテンシャル論的方法は本質的に Kaufman (1968) によるものである．記号が煩雑になるのを防ぐために，ここでは2次

元の場合の証明のみを与えることにし，その高次元化については後に述べよう．まず，$\mathbb{R}^2$ 内の固定した軸に関して θ の角度をなすような原点を通る直線を L_θ とし，$\mathbb{R}^2$ から L_θ 上への正射影を proj_θ と書く．この直線 L_θ 上には自然に1次元ルベーグ測度 $\mathcal{L}^1$ が導入される．また，「ほとんどすべての角 θ」というのは，ルベーグ測度に関するものである．

定理 6.8

E を $\mathbb{R}^2$ 内のススリン集合とし，$\dim E=s$ とおく．このとき，

（a） $s\leq 1$ ならば，ほとんどすべての角 $\theta\in[0,\pi)$ に対して，$\dim(\mathrm{proj}_\theta E)=s$ が成り立つ;

（b） $s>1$ ならば，ほとんどすべての角 $\theta\in[0,\pi)$ に対して，$\mathcal{L}^1(\mathrm{proj}_\theta E)>0$ が成り立つ．

証明 （a） まず補題 6.1 より，すべての角 θ に対して，$\dim(\mathrm{proj}_\theta E)\leq s$ の成り立つことがわかる．次に，この逆の不等式を示そう．任意の $0<t<s\leq 1$ を固定して考える．すると，系 6.6 の（b）より，E のコンパクトな部分集合 F を台にもち $I_t(\mu)<\infty$ を満たすような質量分布 μ が存在する．さて，$\boldsymbol{\theta}$ を θ 方向の単位ベクトルとし，原点から点 x までのベクトルを $\boldsymbol{x}$ と同一視して，内積 $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\theta}$ を考えよう．$F_0=\{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\theta}\colon x\in F\}$ とおけば，F_0 は $\mathbb{R}$ 内のコンパクト集合である．そこで，F_0 上のすべての連続関数 f からなる空間を $\mathcal{F}$ とすると，明らかに，写像 $f\mapsto\int f(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\theta})\,\mathrm{d}\mu(x)$ は $\mathcal{F}$ 上の正の線形汎関数である．したがって，Riesz の表現定理 6.2 より，各 $\boldsymbol{\theta}$ に対して，F_0 を台にもつような $\mathbb{R}$ 上の質量分布 μ_θ が存在して，

$$\int f(u)\,\mathrm{d}\mu_\theta(u)=\int f(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\theta})\,\mathrm{d}\mu(x) \tag{6.7}$$

が成り立つ．このとき，(6.7) 式は，$\mathbb{R}$ 上の任意の連続関数に対して成り立つだけでなく，近似して考えることにより，任意の非負可測関数に対しても成り立つことがわかる．したがって，

$$I_t(\mu_\theta)=\iint\frac{\mathrm{d}\mu_\theta(u)\,\mathrm{d}\mu_\theta(v)}{|u-v|^t}=\iint\frac{\mathrm{d}\mu(x)\,\mathrm{d}\mu(y)}{|\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\theta}-\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{\theta}|^t}=\iint\frac{\mathrm{d}\mu(x)\,\mathrm{d}\mu(y)}{|(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\cdot\boldsymbol{\theta}|^t}$$

を得る．ところで，

$$\int_0^\pi I_t(\mu_\theta)\,\mathrm{d}\theta=c\iint\frac{\mathrm{d}\mu(x)\,\mathrm{d}\mu(y)}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^t}=cI_t(\mu)<\infty,$$

ただし $c=\int_0^{\pi}|\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{\tau}|^{-t}\,\mathrm{d}\theta<\infty$（この積分は $t<1$ だから収束し，また単位ベクトル $\boldsymbol{\tau}$ に依存しない），が成り立つ．したがって，$[0,\pi)\times\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2$ に対する Fubini の定理を適用すれば，$I_t(\mu_\theta)$ は θ の可測関数であり，ほとんどいたるところの θ に対して $I_t(\mu_\theta)<\infty$ となることがわかる．ところが，$u\in\mathbb{R}$ と $u\boldsymbol{\theta}\in L_\theta$ を同一視することによって，μ_θ は台が $\mathrm{proj}_\theta E$ に含まれるような L_θ 上の質量分布であるとみなすことができるから，系6.6の（a）より，$\dim(\mathrm{proj}_\theta E)\geq t$ を得る．ここで，$t<s$ は任意であったから，ほとんどいたるところの θ に対して $\dim(\mathrm{proj}_\theta E)=s$ が成り立つのである．

（b）$s>1$ だから，系6.6の（b）より，E のコンパクトな部分集合を台にもち，$I_1(\mu)<\infty$ を満たすような質量分布 μ が存在する．この μ に対して，（a）と同様にして (6.7) 式を満たすような L_θ 上の質量分布 μ_θ を定めよう．ただし，ここでは測度 μ_θ の代わりに，μ_θ のフーリエ変換 $\hat{\mu}_\theta$ の方を考えるのである．さて (6.7) を用いて，

$$\begin{aligned}|\hat{\mu}_\theta(p)|^2&=\frac{1}{2\pi}\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}up}\,\mathrm{d}\mu_\theta(u)\int \mathrm{e}^{-\mathrm{i}vp}\,\mathrm{d}\mu_\theta(v)\\&=\frac{1}{2\pi}\iint \mathrm{e}^{\mathrm{i}(u-v)p}\,\mathrm{d}\mu_\theta(u)\,\mathrm{d}\mu_\theta(v)=\frac{1}{2\pi}\iint \mathrm{e}^{\mathrm{i}p(x-y)\cdot\boldsymbol{\theta}}\,\mathrm{d}\mu(x)\,\mathrm{d}\mu(y)\end{aligned}$$

が成り立つから，

$$|\hat{\mu}_\theta(p)|^2+|\hat{\mu}_{\theta+\pi}(p)|^2=\frac{1}{\pi}\iint\cos(p(x-y)\cdot\boldsymbol{\theta})\,\mathrm{d}\mu(x)\,\mathrm{d}\mu(y)$$

を得る．こうして，

$$\int_0^{2\pi}|\hat{\mu}_\theta(p)|^2\,\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\iint\cos(p|x-y|\cos\theta)\,\mathrm{d}\mu(x)\,\mathrm{d}\mu(y)\,\mathrm{d}\theta$$

が成り立つ．ここで，右辺の定積分の値は $x-y$ の偏角に依存しないことを用いている．そこで，Fubini の定理によって積分の順序を交換し，ベッセル関数の定義 $J_0(u)=(2\pi)^{-1}\int_0^{2\pi}\cos(u\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta$ を用いれば，

$$\int_0^{2\pi}|\hat{\mu}_\theta(p)|^2\,\mathrm{d}\theta=\iint J_0(p|x-y|)\,\mathrm{d}\mu(x)\,\mathrm{d}\mu(y)$$

を得る．（ベッセル関数の理論については Watson(1966) に詳しい．）さらに，任意に固定した $0<m<\infty$ に対して，Fubini の定理により次の左辺の積分の順序交換が許されて，

$$\int_{-m}^{m}\int_0^{2\pi}|\hat{\mu}_\theta(p)|^2\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}p=\iiint_{-m}^{m}J_0(p|x-y|)\,\mathrm{d}p\,\mathrm{d}\mu(x)\,\mathrm{d}\mu(y)$$

$$=\iiint_{u=-m|x-y|}^{m|x-y|}\frac{J_0(u)}{|x-y|}\mathrm{d}u\mathrm{d}\mu(x)\mathrm{d}\mu(y)$$

$$\leq b\iint\frac{\mathrm{d}\mu(x)\mathrm{d}\mu(y)}{|x-y|}=bI_1(\mu)$$

を得る．ただし，b は m に依存しない定数である．（というのは，広義積分 $\int_{-\infty}^{\infty}J_0(u)\,\mathrm{d}u$ が収束することから，$\int_{-m}^{m}J_0(u)\,\mathrm{d}u$ は m に関して有界となるからである.）そこで，$m\to\infty$ とすることにより，再び Fubini の定理を用いて(容易に確かめられるように，$\hat{\mu}_\theta(p)$ は θ および p の両方に関して連続である)，

$$\int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|\hat{\mu}_\theta(p)|^2\,\mathrm{d}p\mathrm{d}\theta\leq bI_1(\mu)<\infty,$$

したがって，ほとんどいたるところの $\theta\in[0,\pi)$ に対して $\int_{-\infty}^{\infty}|\hat{\mu}_\theta(p)|^2\,\mathrm{d}p<\infty$ が成り立つ．すると，補題 6.7 より，そのような θ に対して，μ_θ の台は正のルベーグ測度をもつことがわかる．ところで，μ_θ の台は μ の台を L_θ に正射影したものだから，ススリン集合 $\mathrm{proj}_\theta E$ に含まれている．（コンパクト集合を正射影したものはコンパクトである.）ゆえに，ほとんどいたるところの θ に対して，$\mathrm{proj}_\theta E$ は正のルベーグ測度をもつのである．□

この定理 6.8 に対して，射影する部分空間の次元に応じたさまざまな高次元化が得られている．$\mathbb{R}^n$ 内のあらゆる k 次元部分空間からなる**グラスマン多様体**(Grassmann manifold)を $G_{n,k}$ とする．この $G_{n,k}$ には自然に，正規化された回転不変の測度が導入され，「ほとんどすべての $\Pi\in G_{n,k}$」というのはこの測度に関するものとする．

Marstrand (1954*a*) の方法および(高次元フーリエ変換を用いて) Kaufman の方法を一般化するのは難しくない．これに関しては Mattila (1975*b*) を参照していただきたい．

定理 6.9

E を $\mathbb{R}^n$ 内のススリン集合とし，$\dim E=s$ とおく．このとき，

（a）$s\leq k$ ならば，ほとんどすべての $\Pi\in G_{n,k}$ に対して $\dim(\mathrm{proj}_\Pi E)=s$ が成り立つ;

（b）$s>k$ ならば，ほとんどすべての $\Pi\in G_{n,k}$ に対して $\mathrm{proj}_\Pi E$ は正の k 次元ルベーグ測度をもつ．

さて，このような定理を得る別の方法として，測度μのエネルギーをμのフーリエ変換を用いて表わす重要な公式

$$I_t(\mu)=c\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|\hat{\mu}(p)|^2}{|p|^{n-t}}\mathrm{d}p \tag{6.8}$$

(ただし，cはnとtのみに依存する定数)を用いて，部分空間Πに射影した測度のフーリエ変換を調べるという方法もある．この公式は，形式的には変換理論におけるたたみこみの公式であるが，厳密に証明するには少し注意が必要である(Carleson(1967，23頁)を参照)．Falconer(1982)は，このような方法を用いて，定理6.8および6.9における**除外集合**(exceptional set)，すなわち，定理が成り立たないようなθあるいはΠの集合に対するハウスドルフ次元の自明でない上界を求めた．この除外集合の大きさに関しては，Kaufman(1968)および，その一般化であるMattila(1975*b*)も別の結果を導いている．また，Kaufman & Mattila(1975)は，できる限り最大の除外集合をもつような$\mathbb{R}^n$内の集合Eの例を与えている．これについては定理8.17を参照のこと．

Mattila(1975*b*)およびFalconer(1982)はハウスドルフ測度よりむしろ容量の方を詳しく研究しており，上述した定理よりは若干一般的な結果を得ている．

さらに，Marstrand(1954*a*)は定理6.8(b)より強い次のような結果を導いている．すなわち，Eを$\mathbb{R}^2$内のs集合$(s>1)$とするとき，ほとんどいたるところのθに対して$\mathrm{proj}_\theta E$が正のルベーグ測度をもつだけでなく，$\mathcal{H}^s(F)>0$を満たすようなEに含まれる任意のススリン集合Fに対しても$\mathrm{proj}_\theta F$は正のルベーグ測度をもつ．つまり，θに関する除外集合は部分集合Fのとり方に依存しないというわけである．

また，Mattila(1975*b*)は定理6.9(b)より強い次のような結果を得ている：$\dim E>k$ならばほとんどすべての$\Pi\in G_{n,k}$に対して$\int_{u\in\Pi}\mathcal{H}^0(E\cap\mathrm{proj}_\Pi^{-1}u)\,\mathrm{d}u=\infty$が成り立つ．($\mathcal{H}^0$は単に集合の点の個数を表わす．)　さらに彼は，$0<t<\dim E-k$ならばほとんどすべての$\Pi\in G_{n,k}$に対して$\mathcal{H}^t(E\cap\mathrm{proj}_\Pi^{-1}u)=\infty$を満たすような$u\in\Pi$の集合は正の$\mathcal{H}^k$測度をもつことを示した．

Davies(1979, 1982)は，最近，連続体仮説を用いて，$\mathbb{R}^2$内の「本質的な」2次元の集合E(すなわち，次元が2より小さい集合の可算和として表わせない

ような集合)で，ほとんどすべての直線への正射影のルベーグ測度が0になるようなものを構成した．つまり，そのような集合 E にまでは上述の定理を拡張することはできない．

6.4 整数次元の集合の射影

ある意味で第3章の続きであるこの節においては，s が整数のときの s 集合 E の射影に関する性質を述べよう．ここでは簡単のために，平面内の線形可測集合を取り扱うことにする．高次元空間における解析は，かなり複雑である．

整数次元をもつ集合 E の射影に関する性質は，E が正則であるか非正則であるかによってきわだった対照をなす．すなわち，E が $\mathbb{R}^2$ 内の正則な1集合であれば，ほとんどすべての直線 L に対して，L への正射影は正の1次元測度をもつ．これに対して，E が非正則な1集合の場合は，ほとんどすべての直線 L に対して，L への正射影の1次元測度は0である．

まず，比較的簡単な正則1集合の場合を取り扱う．前節と同様に，平面内に適当に固定した軸に関して θ の角度をなすような原点を通る直線 L_θ 上への正射影を proj_θ と書く．

定理 6.10

E を $\mathbb{R}^2$ 内の正則な1集合とする．このとき，高々1つの例外値を除いたすべての θ に対して，$\mathcal{L}^1(\mathrm{proj}_\theta E)>0$ が成り立つ．

証明 まず定理3.25より，E は，$\mathcal{H}^1$ 測度0の集合を除いて長さ有限の曲線の可算和の部分集合になる．したがって，E がある長さ有限の曲線 Γ に含まれているような1集合である場合に定理を示せば十分である．

さて，E と Γ の両方に対して正則点になるような点 $x\in E$ を適当に固定しよう．このとき，十分に小さい任意の $\varepsilon>0$ に対して，

$$\mathcal{H}^1(E\cap B_r(x))>(1-\varepsilon^2)2r$$

および

$$\mathcal{H}^1(\Gamma\cap B_r(x))<(1+\varepsilon)2r$$

が成り立つような十分に小さい $r>0$ が存在する．したがって，

$$\mathcal{H}^1(E\cap B_r(x))>(1-\varepsilon)\mathcal{H}^1(\Gamma\cap B_r(x))$$

が成り立ち，ゆえに

$$\mathcal{H}^1((\Gamma\backslash E)\cap B_r(x))<\varepsilon\mathcal{H}^1(\Gamma\cap B_r(x))$$

を得る．ところで，$\Gamma\cap B_r(x)$ は高々可算個の互いに交わらないような Γ の閉部分弧の和集合であるから，

$$\mathcal{H}^1(\Gamma_0\backslash E)<\varepsilon\mathcal{H}^1(\Gamma_0)$$

を満たすような閉部分弧 $\Gamma_0\subset\Gamma\cap B_r(x)$ が少なくとも1つは存在する．

——(訳者追加)　さて，正則集合 Γ_0 の正則点の集合を F とおくと(ただし，Γ_0 の両端点は除いておく)，明らかに $\mathcal{H}^1(\Gamma_0)=\mathcal{H}^1(F)$ である．次に

$$\mathcal{V}=\{U\colon U\text{ は }\mathcal{H}^1(U)<2\cdot(U\text{ の両端点の間の距離})\text{ を満たすような }\Gamma_0\text{ の閉部分弧}\}$$

とおこう．任意の $y\in F$ を固定して考える．すると，十分に小さい任意の $\rho>0$ に対して，

$$\mathcal{H}^1(\Gamma_0\cap B_\rho(y))<4\rho$$

が成り立っている．このとき，一般性を失うことなく，Γ_0 の両端点は $B_\rho(y)$ の外にあるとしてよい．すると，$B_\rho(y)$ に含まれ，点 y と $B_\rho(y)$ の境界上の点を両端点とするような Γ_0 の2つの部分弧 U_+ と U_- を見出すことができて，明らかに $|U_+|,|U_-|<2\rho$ であり，また

$$\mathcal{H}^1(U_+)+\mathcal{H}^1(U_-)\leq\mathcal{H}^1(\Gamma_0\cap B_\rho(y))<4\rho$$

を満たしている．したがって，U_+ か U_- のどちらかの $\mathcal{H}^1$ 測度は 2ρ よりも小さくなければならない．すなわち，そのどちらかは $\mathcal{V}$ に属している．ゆえに，$\mathcal{V}$ は F に関するヴィターリ族をなしている．したがって，被覆定理1.10(a)の性質を満たすような，互いに交わらない部分列 $\{U_i\}$ を $\mathcal{V}$ から選出することができる．ところが，補題3.4より，各 i について $\mathcal{H}^1(U_i)\geq|U_i|$ であるから，$\sum|U_i|\leq\sum\mathcal{H}^1(U_i)\leq\mathcal{H}^1(\Gamma_0)<\infty$ が成り立ち，ゆえに $\mathcal{H}^1(F\backslash\bigcup U_i)=0$ を得る．したがって，$\mathcal{H}^1(\Gamma_0\backslash\bigcup U_i)=0$ が成り立つから，

$$\mathcal{H}^1(U_i\backslash E)<\varepsilon\mathcal{H}^1(U_i)$$

を満たすような部分弧 U_i が少なくとも1つは存在する．そこで，そのような U_i の両端点をそれぞれ y,z とおけば，

$$\mathcal{H}^1(U_i\backslash E)<\varepsilon\mathcal{H}^1(U_i)<2\varepsilon|y-z|$$

が従う．——

さて，$\cos\phi > 2\varepsilon$ を満たすような角 ϕ に対して，線分 $[y, z]$ と ϕ の角度をなすような直線 L_θ への正射影を考えよう．すると，補題 6.1 を用いて，

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^1(\mathrm{porj}_\theta E) &\geq |y-z|\cos\phi - \mathcal{L}^1(\mathrm{proj}_\theta(U_i\backslash E))\\ &\geq |y-z|\cos\phi - \mathcal{H}^1(U_i\backslash E)\\ &> |y-z|(\cos\phi - 2\varepsilon) > 0\end{aligned}$$

が成り立つ．ここで，$\varepsilon > 0$ はいくらでも小さくできたから，結局，高々 1 つの方向を除いて $\mathcal{L}^1(\mathrm{proj}_\theta E) > 0$ が成り立つのである．　□

この定理をもっと量的な形で証明することもできる．例えば，直線の集合に適当な不変測度を導入して，$\mathbb{R}^2$ 内の正則な 1 集合 E に対して，$E\cap L$ の点の個数をすべての直線 L にわたって積分することによって，E の $\mathcal{H}^1$ 測度を求めることができる．これは，まさに積分幾何学における基本的な考え方であって，興味ある読者は Santaló(1976) あるいは Federer(1969) を参照されたい．

さて次に，平面内の非正則な 1 集合 E に対する射影の性質を述べよう．Gillis(1934*a*, 1936*a*) は，ほとんどいたるところの $x\in E$ に対して，

$$\lim_{r\to 0}\mathcal{L}^1(\mathrm{proj}_\theta(E\cap B_r(x)))/\mathcal{H}^1(E\cap B_r(x)) = 0$$

がほとんどすべての θ に対して成立することを示した．しかし Besicovitch (1939) は，ほとんどすべての θ に対して $\mathcal{L}^1(\mathrm{proj}_\theta E) = 0$ になるという，より自然な結果を証明した．この証明の出発点になるのは，非正則な 1 集合は，そのほとんどいたるところで接線をもたないという事実である(系 3.30)．証明を通じて，I とか J は $[0, \pi)$ のある区間を表わすものとする．まず，Besicovitch にならって，3 つの定義を述べよう．

点 $x\in E$ において，方向 θ が**第 1 種の凝縮方向**(condensation direction of the first kind) であるとは，点 x を通る方向 θ の直線 $L_\theta(x)$ が x の任意の近傍内で E と無限回交わるときにいう．

次に，与えられた点 $x\in E$ と正数 ρ, ε, m に対して，$[0, \pi)$ の部分集合 $T(x, \rho, \varepsilon, m)$ を次のように定める．すなわち，

$$\frac{\mathcal{H}^1(E\cap C_r(x, I))}{r} \geq m|I| \tag{6.9}$$

を満たすような $0 < r < \rho$ と，$|I| < \varepsilon$ を満たす $[0, \pi)$ の開部分区間 I をすべて考え，そのような I の和集合を $T(x, \rho, \varepsilon, m)$ とするのである．(ただし $C_r(x,$

I) は，$L_\theta(x)\cap B_r(x)$ の $\theta\in I$ にわたる和集合のことである.)　明らかに，$T(x,\rho,\varepsilon,m)$ は $[0,\pi)$ 内の開集合である.

点 $x\in E$ において，方向 θ が**第2種の凝縮方向**(condensation direction of the second kind)であるとは，

$$\theta\in T=\bigcap_{\rho>0}\bigcap_{\varepsilon>0}\bigcap_{0<m<\infty}T(x,\rho,\varepsilon,m) \tag{6.10}$$

であるときにいう.

点 x が E の**放射点**(point of radiation)であるとは，ルベーグ測度の意味でほとんどすべての方向 $\theta\in[0,\pi)$ が点 $x\in E$ における第1種あるいは第2種の凝縮方向であるときにいう.

Lebesgue の密度定理を巧妙に応用した次の補題は，非正則集合の射影に関する Besicovitch の定理の証明の核心である.

補題 6.11

E は平面内の非正則な1集合で，かつ閉集合であるとする．このとき，E のほとんどいたるところの点は E の放射点である.

証明　系3.30より，$\mathcal{H}^1$ 測度の意味でほとんどいたるところの $x\in E$ に対し

$$\overline{\lim_{r\to 0}}\frac{\mathcal{H}^1(E\cap C_r(x,I))}{2r}>\frac{|I|}{40} \tag{6.11}$$

が，あらゆる閉区間 $I\subset[0,\pi)$ に対して成立していることがわかる．以下に，このような点 x が E の放射点になることを示そう.

まず初めに，点 x における第1種の凝縮方向の集合 S が $[0,\pi)$ のルベーグ可測集合になることに注意しておこう．これを示すために，$L_\theta(x)\cap B_r(x)$ が x 以外の E の点を含むような θ の集合を $S(r)$ とおく．すると，E は閉集合であるから，$\{\theta\colon \delta\leq|x-y|\leq r$ を満たすような $y\in L_\theta\cap E$ が存在する$\}$ も閉集合となり，$S(r)$ は，δ が正の有理数をわたるときのこのような集合の和集合になるから，ボレル集合になる．ところで，$S=\bigcap_{j=1}^\infty S(1/j)$ であるから，S もボレル集合となり，ゆえにルベーグ可測である.

次に，任意に固定した正数 ρ,ε および m に対して，ほとんどすべての $\theta\notin S$ が $T(x,\rho,\varepsilon,m)$ に属していることを示そう．まず，$[0,\pi)$ 上のルベーグ測度を $\mathcal{L}^1$ と書けば，Lebesgue の密度定理1.13より，ほとんどすべての $\theta\notin S$ に対して，S のルベーグ密度は0である．すなわち，$\lim_{r\to 0}\mathcal{L}^1(S\cap[\theta-r,\theta+r])/$

$2r=0$ が成り立つ．以後，このような角 θ を固定して考えよう．このとき，θ を含むような十分に小さいすべての閉区間 $I\subset[0,\pi)$ に対して，

$$\mathcal{L}^1(S\cap I)<\frac{|I|}{40m} \tag{6.12}$$

が成り立っている．そこで，$0<|I|<\varepsilon$ を満たし，かつ (6.12) を満たすような閉区間 I で，θ を内部に含むようなものを適当に固定して考えよう．さて，$r\to 0$ のとき $S(r)\searrow S$ であるから，十分に小さい正数 $\rho_1\leq\rho$ を選んで，

$$\mathcal{L}^1(S(r)\cap I)<\frac{|I|}{40m} \tag{6.13}$$

がすべての $0<r<\rho_1$ に対して成立しているようにできる．一方，このようにして定めた I に対して，(6.11) より，

$$\mathcal{H}^1(E\cap C_r(x,I))>\frac{2r|I|}{40} \tag{6.14}$$

が成り立つように十分小さい $0<r<\rho_1$ を見出すことができる．以後，このような r を固定して考える．ところで，E は非正則な 1 集合であるから，あらゆる長さ有限の曲線との共通部分の $\mathcal{H}^1$ 測度は 0 である．したがって，I の代わりに I の内部を考えても，(6.13) および (6.14) は成立していることがわかる．以後，I は $[0,\pi)$ 内の開区間であるとしよう．このとき，もし

$$\mathcal{H}^1(E\cap C_r(x,I))\geq mr|I| \tag{6.15}$$

が成り立っていれば，定義よりただちに $\theta\in T(x,\rho,\varepsilon,m)$ を得る．そこで，I がこの不等式を満たさない場合を以下に考えよう．この場合は，ルベーグ測度の定義を用いて，(6.13) から，

$$S(r)\cap I\subset\bigcup_1^\infty I_i \tag{6.16}$$

および

$$\mathcal{L}^1\Bigl(\bigcup_1^\infty I_i\Bigr)<\frac{|I|}{40m} \tag{6.17}$$

を満たすような，互いに交わらない I の部分開区間列 $\{I_i\}$ が存在する．さて，この区間列に対し

$$\mathcal{H}^1(E\cap C_r(x,I_i))>mr|I_i| \tag{6.18}$$

を満たすような整数 i の集合を Q としよう．すると，(6.17) より，

$$\sum_{i\notin Q}\mathcal{H}^1(E\cap C_r(x,I_i))\leq mr\mathcal{L}^1(\bigcup_{i\notin Q}I_i)<\frac{r|I|}{40} \tag{6.19}$$

が成り立つ．ところで，$E\cap C_r(x,I)$ は $L_\theta(x)\cap B_r(x)$ の $\theta\in S(r)\cap I$ にわたる和集合であるから，(6.16) より，

$$\bigcup_{i=1}^{\infty}(E\cap C_r(x,I_i))\supset E\cap C_r(x,S(r)\cap I)=E\cap C_r(x,I)$$

が成り立ち，ゆえに，(6.19) と (6.14) を用いて，

$$\begin{aligned}(6.20)\qquad &\sum_{i\in Q}\mathcal{H}^1(E\cap C_r(x,I_i))\\ &=\sum_{i=1}^{\infty}\mathcal{H}^1(E\cap C_r(x,I_i))-\sum_{i\notin Q}\mathcal{H}^1(E\cap C_r(x,I_i))\\ &>\mathcal{H}^1(E\cap C_r(x,I))-\frac{r|I|}{40}>\frac{r|I|}{40}\end{aligned}$$

を得る．したがって，特に集合 Q は空ではないことがわかる．さらに，Q の適当な有限部分集合を改めて Q とおいても，(6.20) が成り立つようにできるので，以後，Q は有限であるとしよう．また，E は非正則な 1 集合であるから，$\mathcal{H}^1(E\cap C_r(x,J))$ は J に関して連続になることに注意しよう．さて，I_i, $i\in Q$, をすべて含むような最小の開区間 J^0 を考えよう．このとき，J^0 が (6.15) を満たせば，I 自身が (6.15) を満たさないことから，J^0 を少しふくらませることによって，$\mathcal{H}^1(E\cap C_r(x,J))=mr|J|$ を満たす $J\subset I$ の存在が従う．そうでない場合，すなわち J^0 が (6.15) を満たさない場合は，J^0 の中で最も左側に位置するような $I_i, i\in Q$, を含み，その右端点がどの $I_i, i\in Q$, にも属さないような開区間 $J\subset J^0$ で $\mathcal{H}^1(E\cap C_r(x,J))=mr|J|$ を満たすものが存在する．しかも，残りの区間 $J^0\backslash J$ は，やはり (6.15) を満たしていない．したがって，以上の操作を有限回繰り返すことによって，結局，有限個の互いに交わらない I の部分開区間列 $\{J_j\}$ を見出して，

$$J=\bigcup_j J_j\supset\bigcup_{i\in Q}I_i$$

を満たし，かつ各 j に対して，

$$(6.21)\qquad \mathcal{H}^1(E\cap C_r(x,J_j))=mr|J_j|$$

が成り立つようにできることがわかる．すると，(6.20) と (6.21) から，

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^1(J)=\sum_j|J_j|&=\frac{1}{mr}\mathcal{H}^1(E\cap C_r(x,\bigcup_j J_j))\\ &>\frac{|I|}{40m}\end{aligned}$$

を得る．一方，(6.21) と $T(x,\rho,\varepsilon,m)$ の定義から，ただちに $J\subset T(x,\rho,\varepsilon,m)\cap I$ が成り立つ．したがって，

$$\mathcal{L}^1(T(x,\rho,\varepsilon,m)\cap I)>\frac{|I|}{40m}$$

を得る．ここで，I は θ を含むようないくらでも小さい閉区間にとることができたから，結局，ほとんどすべての $\theta\notin S$ に対して，$\theta\in T(x,\rho,\varepsilon,m)$ が成り立つか，あるいは $T(x,\rho,\varepsilon,m)$ の点 θ における下ルベーグ密度が $1/(40m)$ 以上であるかのいずれかが成り立つ．ところが，Lebesgue の密度定理 1.13 より，ほとんどすべての $\theta\notin T(x,\rho,\varepsilon,m)$ に対して，$T(x,\rho,\varepsilon,m)$ のルベーグ密度は 0 でなければならないことから，ほとんどすべての $\theta\notin S$ は $T(x,\rho,\varepsilon,m)$ に属すことがわかる．

さて，ρ,ε が減少するとき，あるいは m が増加するとき，明らかに $T(x,\rho,\varepsilon,m)$ は単調に減少する．よって，T の定義式 (6.10) において，ρ,ε,m を正の有理数に制限して共通部分をとってもよいことがわかる．ゆえに，ほとんどすべての $\theta\notin S$ に対して $\theta\in T$ が成り立ち，点 x は E の放射点になる． □

上述の証明を少し修正すれば，任意の非正則な 1 集合 E に対しても補題 6.11 が成立することを示すことができる．

非正則な 1 集合 E のほとんどいたるところの点が第 2 種の放射点（すなわち，ほとんどすべての方向が第 2 種の凝縮方向であるような点）であるかどうかは，まだ知られていない．

さて次に，$E\times[0,\pi)$ 上の直積測度 $\mathcal{H}^1\times\mathcal{L}^1$ を考えよう．これは，任意のボレル集合 A と B に対して $(\mathcal{H}^1\times\mathcal{L}^1)(A\times B)=\mathcal{H}^1(A)\mathcal{L}^1(B)$ を満たすような測度である．まず，$E\times[0,\pi)$ 内の部分集合 G_1 と G_2 を次のように定める：各 $i=1,2$ に対して，

$$G_i=\{(x,\theta):\theta\text{ は点 }x\in E\text{ における第 }i\text{ 種の凝縮方向である}\}.$$

補題 6.12

E を平面内の非正則な 1 集合で，かつ閉集合であるとする．このとき，G_1 と G_2 は $E\times[0,\pi)$ のボレル集合，したがって $\mathcal{H}^1\times\mathcal{L}^1$ 可測集合である．

証明 (a) 任意の $0<r<\rho$ に対して，

$$G_{r,\rho}=\{(x,\theta): r\leq|x-y|\leq\rho \text{ を満たすような } x\in E \text{ と } y\in E\cap L_\theta(x) \text{ が存在する}\}$$

とおこう．このとき，E は閉集合であるから，（相対位相の意味で）$G_{r,\rho}$ も閉集合である．一方，r が減少するとき $G_{r,\rho}$ は単調に増大し，また ρ が減少するとき $G_{r,\rho}$ は単調に減少することから，

$$G_1=\bigcap_{\rho>0}\left[\bigcup_{r<\rho}G_{r,\rho}\right]$$

において，r と ρ を正の有理数に制限しても差し支えない．ゆえに，G_1 はボレル集合である．

（b）　E は非正則な1集合であるから，$\mathcal{H}^1(E\cap C_r(x,I))$ は x, r および I に関して連続であることがわかる．こうして，$T(x,\rho,\varepsilon,m)$ を定める (6.9) 式において「$\geq$」を「$>$」に変えた場合の集合を $T'(x,\rho,\varepsilon,m)$ と書くとき，$\{(x,\theta): \theta\in T'(x,\rho,\varepsilon,m)\}$ は（相対位相の意味で）$E\times[0,\pi)$ の開集合になる．ところで，$T(x,\rho,\varepsilon,m)$ は m に関して単調であることから，

$$G_2=\bigcap_{\rho>0}\bigcap_{\varepsilon>0}\bigcap_{0<m<\infty}\{(x,\theta): \theta\in T'(x,\rho,\varepsilon,m)\}$$

を得る．右辺において，ρ,ε,m は正の有理数に制限してよいから，G_2 はボレル集合である．　□

さて，いよいよ非正則な1集合の射影に関する定理を述べよう．

定理 6.13

E を $\mathbb{R}^2$ 内の非正則な1集合とする．このとき，ほとんどすべての方向 $\theta\in[0,\pi)$ に対し $\mathcal{L}^1(\mathrm{proj}_\theta E)=0$ が成り立つ．

証明　まず，E がコンパクト集合の場合を考えよう．すると，補題6.12より，$G=G_1\cup G_2$ は $E\times[0,\pi)$ の $\mathcal{H}^1\times\mathcal{L}^1$ 可測部分集合であり，また補題6.11より，ほとんどいたるところの $x\in E$ に対して，

$$\mathcal{L}^1(\{\theta: (x,\theta)\in G\})=\pi$$

が成り立っている．したがって Fubini の定理によって，$\mathcal{L}^1$ に関してほとんどすべての方向 $\theta\in[0,\pi)$ に対して，$(x,\theta)\in G$ が $\mathcal{H}^1$ に関してほとんどいたるところの $x\in E$ で成立することがわかる．そこで，そのような θ を固定して考えよう．θ はほとんどいたるところの点 $x\in E$ における凝縮方向である．さて，原点を通り，θ 方向に関して垂直な直線を L_ϕ とする（すなわち $\phi=\theta+\frac{1}{2}\pi$

$(\mathrm{mod}\ \pi)$). このとき．この直線 L_ϕ への E の正射影のルベーグ測度が 0 になることを以下に示そう．

各 $i=1,2$ に対して，方向 θ が第 i 種の凝縮方向であるような E の点の集合を E_i とおく．すると，$\mathcal{H}^1(E_0)=0$ なる E の部分集合 E_0 があって，$E=E_0\cup E_1\cup E_2$ のように表現することができる．このとき，

（a） E_0 について; 補題 6.1 より，ただちに $\mathcal{L}^1(\mathrm{proj}_\phi E_0)=0$.

（b） E_1 について; この場合は，直積集合に関する定理 5.8 を応用しよう．まず，$x\in E_1$ とすると，x の任意の近傍内で $L_\theta(x)$ は E と無限回交わるから，$\mathcal{H}^0(L_\theta(x)\cap E)=\infty$ を得る．そこで，直積空間 $L_\phi\times L_\theta$ を $\mathbb{R}^2$ と同一視して，$s=1$, $t=0$ の場合の定理 5.8 を用いれば，任意の正数 c に対して，

$$\infty>\mathcal{H}^1(E_1)\geq bc\mathcal{H}^1(\mathrm{proj}_\phi E_1)$$

が成り立つ．したがって，$\mathcal{H}^1(\mathrm{proj}_\phi E_1)=\mathcal{L}^1(\mathrm{proj}_\phi E_1)=0$ を得る．

（c） E_2 について; 任意に固定した $m>0$ に対して，

$$\mathcal{V}=\{J\colon J \text{ は } \mathcal{H}^1(\{x\in E\colon \mathrm{proj}_\phi x\in J\})>m|J| \text{ を満たすような } L_\phi \text{ の閉部分区間}\}$$

とおこう．すると，任意の $y\in\mathrm{proj}_\phi E_2$ に対し $y=\mathrm{proj}_\phi x$ を満たす $x\in E_2$ が少なくとも 1 つは存在し，いくらでも小さい ρ,ε に対して $\theta\in T(x,\rho,\varepsilon,m)$ が成り立つ．すなわち，$0<r<\rho$ なる正数 r と，$|I|<\varepsilon$ を満たすような θ を含む開区間 I が存在して，

$$\mathcal{H}^1(E\cap C_r(x,I))\geq mr|I|$$

が成り立つ．ところで，$C_r(x,I)$ は，幅が $r|I|$ より狭い θ 方向に平行な閉板に含まれることから，この閉板と L_ϕ との交わりを J とおけば，

$$\mathcal{H}^1(\{x\in E\colon \mathrm{proj}_\phi x\in J\})\geq\mathcal{H}^1(E\cap C_r(x,I))\geq mr|I|>m|J|$$

を得る．すなわち $J\in\mathcal{V}$ である．このとき，明らかに $y\in J$ および $|J|\leq r|I|<\varepsilon\rho$ が成り立ち，ρ,ε はいくらでも小さくできるから，$\mathcal{V}$ は $\mathrm{proj}_\phi E_2$ のヴィターリ族になることが従う．また，明らかに $\mathcal{L}^1(\mathrm{proj}_\phi E_2)<\infty$ であるから，Vitali の被覆定理 1.10（b）より，任意の $\varepsilon>0$ に対して，互いに交わらない部分列 $\{J_i\}$ を $\mathcal{V}$ から選出して，

$$\mathcal{L}^1(\mathrm{proj}_\phi E_2)\leq\sum|J_i|+\varepsilon\leq\frac{1}{m}\mathcal{H}^1(E)+\varepsilon$$

が成り立つようにできる．ここで，ε と $1/m$ はいくらでも小さくとることが

できるから，$\mathcal{L}^1(\mathrm{proj}_\phi E_2)=0$ を得るのである．

以上の（a）-（c）をまとめて，ほとんどすべての角 ϕ に対して $\mathcal{L}^1(\mathrm{proj}_\phi E)=0$ の成り立つことがわかる．

最後に，E が一般の非正則な1集合の場合は，$\mathcal{H}^1$ の正則性より，任意の $\delta>0$ に対して $\mathcal{H}^1(G)<\delta$ を満たすような集合 G とコンパクト集合 F とによって $E=F\cup G$ のように分解される．ところで，F に対しては，ほとんどすべての方向 θ に対して $\mathcal{L}^1(\mathrm{proj}_\theta F)=0$ となることがわかっているから，補題6.1より，$\mathcal{L}^1(\mathrm{proj}_\theta E)=\mathcal{L}^1(\mathrm{proj}_\theta G)\leq\mathcal{H}^1(G)<\delta$ が成り立つ．ここで，δ は任意であったから，$\mathcal{L}^1(\mathrm{proj}_\theta E)=0$ がほとんどすべての方向 $\theta\in[0,\pi)$ で成立する．□

次の系は，非正則な1集合に対する便利な判定条件を与えるものである．

系 6.14

$\mathbb{R}^2$ 内の1集合 E が非正則であるための必要十分条件は，異なる2つの方向の直線への E の正射影のルベーグ測度が0になることである．

証明　（a）　E が非正則な1集合であれば，定理6.13より，E の正射影の $\mathcal{L}^1$ 測度が0になるような異なる2つの方向の直線を見出すことができる．

（b）　一方，E の正則部分が正の測度をもてば，定理6.10より，高々1つの例外方向を除いて，E の正射影は正の $\mathcal{L}^1$ 測度をもつ．ゆえに，（a）の逆も成立する．□

上述の定理6.13に関連して，あらゆる方向の直線への正射影のルベーグ測度が0になるような平面内の1集合が存在するだろうかという素朴な疑問が生じる．これに関して，Besicovitch(1928*a*, 第3章)は実際にそのような非正則集合を構成してみせた．これを以下に述べよう．また，Morgan(1935)は別の方法を用いてそのような集合を構成している．

定理 6.15

$\mathbb{R}^2$ 内の1集合で，あらゆる方向の直線への正射影の $\mathcal{L}^1$ 測度が0になるものが存在する．

証明 $k\geq 2$ を整数とし，$1/k>2\pi/r$ を満たす最小の正整数を r とする．$\phi=2\pi/r$ とおく．まず，隣り合う辺の長さが a と $a/2k$ で，それらのなす角が $\frac{1}{2}(\pi\pm\phi)$ であるような平行四辺形 P を考える．この P と相似ないくつかの小平行四辺形を P の内部に配置する作用素の列を，以下に定義しよう．

まず，短辺の長さが $a/(2k)^2$ であるような P と相似な $2k$ 個の小平行四辺形を P の内部に配置する．ただし，各小平行四辺形の短辺は P の長辺上に等間隔に配置されており，また各小平行四辺形の長辺は P の長辺に対して $\frac{1}{2}(\pi-\phi)$ の角をなしているものとする．次に，各小平行四辺形に対して，P に対して行なったのと全く同じ操作を行なうことによって，P の内部に規則正しく配置された $(2k)^2$ 個の小平行四辺形群を得る．このとき，これらの小平行四辺形の長辺の長さは $a/(2k)^2$，短辺の長さは $a(2k)^3$ であり，ちょうど P を角度 ϕ だけ回転して相似縮小したものになっている（図 6.1 参照）．この $(2k)^2$ 個の小平行四辺形群を P_1 とし，P から P_1 を作る作用素を T としよう．すると，P_1 に属する平行四辺形の長辺の長さの和は a であり，また $\phi<1/k$ であるから，任意の $0\leq\theta\leq\phi$ に対して，

$$\mathcal{L}^1(\mathrm{proj}_\theta P_1)\leq a/k$$

が成り立つことに注意しよう．ただし，角 θ は P の長辺を基準に測るものとする．

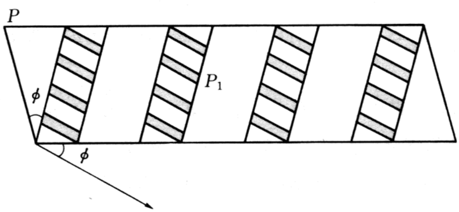


図 6.1

同様にして，P_1 を構成する各平行四辺形に T を作用させて，P の内部に $(2k)^4$ 個の小平行四辺形群 P_2 を作る．それぞれの小平行四辺形は P を角 2ϕ だけ回転して相似縮小したものであり，その長辺の長さは $a/(2k)^4$ である．このとき，上と同様にして，任意の $\phi\leq\theta\leq 2\phi$ に対して $\mathcal{L}^1(\mathrm{proj}_\theta P_2)\leq a/k$ の成り立つことがわかるが，$P_2\subset P_1$ であるから，実は任意の $0\leq\theta\leq 2\phi$ に対して

成り立つことがわかる．

以下同様にして，P_{j-1} に T を作用させて P_j を作るという操作を続け P_r まで作るものとする．ところで，$\phi=2\pi/r$ であるから，P_r を構成する $(2k)^{2r}$ 個の各小平行四辺形は P を回転せずにそのまま相似縮小したものになっている．このとき，これらの小平行四辺形の長辺の和は a であり，$\mathcal{L}^1(\mathrm{proj}_\theta P_r)\leq a/k$ が任意の $0\leq\theta\leq 2\pi$ に対して成立している．簡単のために，以上のようにして P から P_r を作る作用素を T_k と書こう．

さて今度は，長さ a の線分 S_0 から，それに平行ないくつかの小線分を作る作用素 U_r を定義しよう．前と同様に，r は $1/k<2\pi/r$ を満たすような最小の正整数であるとし，$\phi=2\pi/r$ とおく．まず，S_0 を長辺と考えて，短辺が $a/2k$ で，それらのなす角が $\frac{1}{2}(\pi\pm\phi)$ であるような平行四辺形 P を考える．この P に対し，T_k を作用させて $P_r=Q$ を作る．この Q を構成している小平行四辺形の底辺（すなわち下側の長辺）の集合を S とおく．S は S_0 に平行な $(2k)^{2r}$ 個の小線分から成り立っており，それらの長さの和は a に等しく，S の直線への正射影のルベーグ測度は直線の方向によらず a/k 以下になることがわかる．このようにして，S_0 から S を作る作用素を U_k とおく．

最後に，無限大に発散する適当な正整数列を $\{k_j\}$ とする．平面内に適当に単位線分をとり，これに U_{k_1} を作用させて小線分群 S_1 を作り，またこれに対応する小平行四辺形群を Q_1 とする．以下同様にして，S_{j-1} の各線分に U_{k_j} を作用させて小線分群 S_j と，これに対応する小平行四辺形群 Q_j を作るものとする．

上述のようにして構成した $\{Q_j\}$ に対し $E=\bigcap_{j=1}^{\infty}Q_j$ とおく．このコンパクト集合 E が求める集合であることを示そう．まず，あらゆる方向 θ に対して $\mathcal{L}^1(\mathrm{proj}_\theta Q_j)\leq 1/k_j$ が成り立つから，$\mathcal{L}^1(\mathrm{proj}_\theta E)=0$ を得る．したがって，E が1集合になることを示せばよい．さて，Q_j を構成する小平行四辺形の個数を m とおけば，この平行四辺形の長辺の長さは $1/m$ で，短辺の長さは $1/(2k_jm)$ だから，その直径は $2/m$ より小さいことがわかる．この平行四辺形群は E の $2/m$ 被覆を与えており，また m はいくらでも大きくできることから，$\mathcal{H}^1(E)\leq 2$ を得る．一方，$\{V_i\}$ を開凸集合からなる E の任意の被覆とする．

——(訳者追加)　このとき，ハウスドルフの距離の意味で，$\sum\delta(Q_{j+1},Q_{j+1}\cap Q_j)<\infty$ を示すことができることから，任意の $\delta>0$ に対して，十分に大きい

i をとれば $Q_i \subset [E]_\delta$ が成り立つようにできる．したがって，$Q_j \subset \bigcup_i V_i$ を満たすような十分大きな j が存在することがわかる．このような j を固定して考えよう．簡単のために Q_j を構成している平行四辺形の個数を m とする．このとき，各平行四辺形の長辺の長さは $1/m$ である．さて，V_i がこのような平行四辺形の $p \geq 2$ 個と交わっているならば，

$$(6.22) \qquad |V_i| > \frac{p}{3m}$$

が成り立つことを示そう．構成法から明らかに，Q_j に属する平行四辺形群は $2k_j$ 個ずつの組に分けることができて，各組の平行四辺形は $2k_j$ 倍の平行四辺形内に等間隔に配置されている．そこで，V_i と交わる平行四辺形がすべて同じ組に属している場合を考えよう．この場合は，V_i の凸性より，V_i の直径はそれと交わっている平行四辺形の中で両端に位置するものの間の距離よりは大きい．したがって，

$$|V_i| > \frac{1}{m}\left(p-1-\frac{1}{2k_j}\right)\cos\frac{\pi}{r_j} > \frac{p}{3m}$$

を得る．ただし，r_j は $2k_j\pi$ より大きな最小の整数である．次に，V_i が異なる組に属するような平行四辺形と交わっているならば，各組を包む $2k_j$ 倍の平行四辺形(その長辺の長さ $2k_j/m$ は，それが含む小平行四辺形の長辺の長さの和に等しい)に対して，同様の考察を行なうことによって，やはり (6.22) の成り立つことがわかる．さて，残りの場合，つまり，いくつかの V_i によって被覆された Q_j の平行四辺形で，そのような V_i は決して他の平行四辺形とは交わっていないようなものを考える．この場合は，明らかに $1/m \leq \sum' |V_i|$ を得る．ただし，$\sum'$ は，この平行四辺形に交わる V_i についてのみの和を表わしている．したがって，以上をまとめて，

$$\sum |V_i| > \frac{1}{3}$$

の成り立つことがわかる．——

ここで，$\{V_i\}$ は任意であったから，$\frac{1}{3} \leq \mathcal{H}_1(E)$ を得る．ゆえに E は 1 集合である．(実際は $\mathcal{H}^1(E) = 2^{-\frac{1}{2}}$ である．) □

Gillis (1936*b*) は，この定理 6.15 で構成した集合 E に対して，平面内のあらゆる点からの E の射影のルベーグ測度が 0 になることを示した．

定理 3.32 において構成した平面内の非正則な 1 集合(正確には，それに可算個の点を付け加えてコンパクト集合にしたもの)を考えれば，少なくとも 2 つの方向の直線(すなわち両軸に平行な直線)への正射影が単位区間になっていることがわかる．これに関しては，Marstrand(1954*a*) が，ハウスドルフ次元が 1 であるような θ の集合に対して $\mathcal{L}^1(\mathrm{proj}_\theta E)>0$ を満たす非正則 1 集合の存在することを示し，それ以前の Gillis(1934*a*) の結果を改良した．この種の集合は定理 8.17 において再び取り扱う．

次の 2 つの定理は，定理 6.10 および 6.13 の自然な高次元化である．

定理 6.16

E を $\mathbb{R}^n$ 内の正則な k 集合(ただし k は整数)とする．このとき，ほとんどすべての $\Pi\in G_{n,k}$ に対して $\mathcal{L}^k(\mathrm{proj}_\Pi E)>0$ が成り立つ．

定理 6.17

E を $\mathbb{R}^n$ 内の非正則な k 集合(ただし k は整数)とする．このとき，ほとんどすべての $\Pi\in G_{n,k}$ に対して $\mathcal{L}^k(\mathrm{proj}_\Pi E)=0$ が成り立つ．

これらの定理は，(一般のハウスドルフ測度に対して) Federer(1947) によって証明された．n 次元空間内の s 集合の幾何学的構造に関する研究の多くは，これらの射影に関する結果に依存しており，より簡潔な証明が望まれるところである．

6.5 おわりに

ここでは，本章で述べてきた定理に関連したいろいろな結果を簡単に述べよう．

まず，射影変換について考えてみよう．平面内に与えられた直線 L に対して，無限遠直線を L の上に写すような射影変換を ϕ_L とする．ϕ_L は直線を直線に写し，ϕ_L によって無限遠直線の上に写るような点を除いて，この変換は局所的に解析的である．したがって，点 x からの射影(すなわち，x を端点とし

yを通るような半直線と中心xの単位円との交点に点yを対応させる写像)をproj_xと書けば，このψ_Lを用いて，直線L上の点xからの射影に関する性質を定理6.8, 6.10および6.13から導くことができる．例えば，定理6.8(a)より，$\dim E=s\leq 1$を満たすような平面内のススリン集合をEとおけば，ほとんどいたるところの$x\in L$に対して$\dim(\mathrm{proj}_x E)=s$が成り立つ．$L$は任意であったから，ゆえに，ほとんどいたるところの$x\in\mathbb{R}^2$に対して，このことが成り立つ．

Marstrand(1954a, 6節)はs集合の局所的性質を調べるために，その集合と直線との共通部分を研究した．彼は，平面内のs集合$(s>1)$ Eに対して，Eのほとんどいたるところの点を通るほとんどすべての直線とEとの共通部分はハウスドルフ次元$s-1$をもち，かつ有限の$\mathcal{H}^{s-1}$測度をもつことを示した．Mattila(1975b)は，この結果の自然な高次元化を与え，またその後の論文(1981)では，容量を用いた結果も得ている．

一般に，曲線とs集合との共通部分については，例えば，$f^{-1}(x)$が曲線あるいは曲面を表わすようなリプシッツ関数fに対して，

$$\int \mathcal{H}^s(E\cap f^{-1}(x))\,\mathrm{d}\mathcal{H}^t(x)\leq c\mathcal{H}^{s+t}(E)$$

の形の不等式が得られている．これに関してはFederer(1969)を，また容量を用いた結果についてはMattila(1984a, 1984b)を参照されたい．さて，Eを平面内のs集合$(s>1)$とし，Γを曲線とすれば，正の測度をもつような回転運動σの集合に対して$\dim(E\cap\sigma(\Gamma))=s-1$が成り立つ．これについては，Mattila(1984a)がこの高次元版を研究し，また非正則集合との共通部分に関しては，このような結果が成立しないことを示した．一方で，Eが長さ有限の曲線である場合は，Federer(1969)あるいはSantaló(1976)に述べてあるように，これは古典的な積分幾何学の結果である．また，Mattila(1982)はEが自己相似集合(8.3節を参照)の場合を研究し，Eと曲線あるいは曲面との共通部分の次元に関する著しい性質を見出した．

第 6 章の練習問題

6.1　容量は劣加法的であること，すなわち，任意の $E, E' \subset \mathbb{R}^n$ に対して，$C_t(E \cup E') \leq C_t(E) + C_t(E')$ が成り立つことを示せ．また，互いに交わらないボレル集合 E と E' で，上の等式を満たさないような例を示せ．したがって，C_t はボレル測度ではない．

6.2　Γ を $\mathbb{R}^2$ 内の長さ有限の曲線とする．また，原点からの(符号付きの)距離が t で，方向が θ の直線と Γ との交点数を $n(t,\theta)$ とするとき，積分幾何学における次の Poincare の公式が成り立つことを示せ：

$$\mathcal{L}(\Gamma) = \frac{1}{2}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{t=-\infty}^{\infty} n(t,\theta)\ \mathrm{d}t\mathrm{d}\theta.$$

6.3　単位正方形の各辺を $k \geq 3$ 等分することによって，k^2 個の小正方形を作る．また，正方形の中心が一直線上に並ばないように，各列から正方形を 1 つずつ選び出した図形を F とする．次に，F を構成する各小正方形に対し，F を相似縮小した図形で置き換える．以下，このような操作を繰り返し，その極限を考えることによってカントール型の集合 E を得る．このとき，E は非正則な 1 集合になることを示せ．

7

ベシコヴィッチ集合と掛谷集合

7.1 はじめに

まず，掛谷問題の興味ある由来について述べよう．1917年，Besicovitchはリーマン積分に関する問題を研究中に，次のような問題に直面した．すなわち，fを平面上で定義されたリーマン積分可能な関数とするとき，はたしてうまく直交座標系を見出して，すべてのyに対して$\int f(x, y)\,\mathrm{d}x$がリーマン積分として存在し，かつこの$y$の関数がリーマン積分可能であるようにできるだろうか？　これに関して，Besicovitchは，もし平面内の2次元ルベーグ測度0のコンパクト集合Fで，あらゆる方向の線分を含んでいるようなものが構成できれば，上述の問題に対する反例を与えることに気付いたのである．以下に，このことを説明しよう．まず平面内に適当に直交座標軸を固定する．ただし，各座標軸に対し，それと平行なFに含まれる線分のうちで，その座標軸との距離が無理数になるようなものが少なくとも1つは存在するように直交軸を定めるものとする．このようにして選んだ座標軸に対し，少なくともどちらか一方の座標が有理数であるようなFの点の集合をF_0とおく．そしてこの集合F_0の特性関数をfと定めよう．すると，容易に確かめることができるように，その上ではF_0もF_0の補集合もともに稠密になるような，あらゆる方向の線分が存在する．つまり，その上ではfのリーマン積分が定義できないような，あらゆる方向の線分が存在する．一方，Fは閉集合であるから，fの不

連続点全体は F に含まれ，したがって，その2次元ルベーグ測度は0である．ゆえに，Lebesgue の有名な判定法によって，平面上の関数として f はリーマン積分可能であることがわかる．

その後，Besicovitch (1919) は，上述の性質をもつコンパクト集合 F を構成することに成功した．これが**ベシコヴィッチ集合**として知られているものである．当時のロシアの不安定な社会状況のため，彼の論文は広く配布されなかったのであるが，その後，彼の構成法は *Mathematische Zeitschrift* (1928) に再発表されたのである．

これとほぼ同じ頃，Kakeya (1917) および Fujiwara & Kakeya (1917) は，その内部で単位長の線分が反転できるような面積最小の凸集合を見出す問題を研究していた．つまり，その集合の内部で単位長の線分をうまく工夫して動かし，180°回転させてもとの位置にもどすことのできるような凸集合の中で最小のものを見出せという問題である．彼らは，求める凸集合は高さが1の正三角形であろうと予想し，また，凸性という条件をおとせば，三尖点内サイクロイドのようなより面積の小さい集合が可能であるという Kubota の考察にも言及している．その後，Pál (1921) は凸性の場合に対する彼らの予想を証明し，凸性をおとした問題の方がより興味深いことを再び指摘した．これが「掛谷問題」として知られるようになったのである．

Besicovitch が1924年にロシアを離れてまもなく，Besicovitch (1928*b*) および Perron (1928) は，ベシコヴィッチ集合を少し修正するだけで，いくらでも小さい測度をもつような掛谷問題の解が得られることに気付いた．こうしてこの問題は意外な方法で解決に至ったのである．

おそらく，その後の最も重要な進展をもたらしたのは，やはり Besicovitch (1964*a*) であろう．彼は，これまで本書で説明してきた幾何学的測度論とベシコヴィッチ集合との間の基本的関係を見出した．つまり，極相反法を用いることによって，非正則な線形可測集合の射影に関する定理の双対性として，ベシコヴィッチ集合の存在が導けることを証明したのである．Besicovitch にせよ他の研究者にせよ，長年両方の問題にかかわってきたにもかかわらず，このような双対関係になかなか気付かなかったということは驚くべきことである．

これらの問題に関連して，数多くの論文が発表されている．例えば，あらゆる多角形あるいはあらゆる半径の円を含むような平面内のルベーグ測度0の集

合が構成されている．また，高次元空間における類似の集合の可能性についても研究されている．最近では，調和解析においてこれまで難問とされてきた問題に対して，このような考え方が用いられているのである．

1958年，掛谷問題は，全米数学協会製作の最初の映画の主題に選ばれた．Besicovitch 自身のナレーションによるこの素晴らしい映画は見るだけの価値が十分にある．

7.2 ベシコヴィッチ集合と掛谷集合の構成

この節では，ベシコヴィッチ集合，すなわち，あらゆる方向の線分を含むような平面内の測度0の集合を構成しよう．Besicovitch 自身の構成法(1919, 1928*b*) は，その後，Perron(1928)，van Alphén(1942)，Rademacher(1962)，Schoenberg (1962*b*)，Besicovitch (1963*c*)，Cunningham (1971) および Fisher(1973) らによってかなり簡単化されている．しかし，これらすべての構成法に基本的に共通しているのは，**ペロンの木**(Perron tree)を作ること，つまり，高さが1の正三角形の底辺を等分してできるいくつかの小三角形を，この底辺を含む直線 L に沿って動かして得られる樹木状の集合を作ることである(図7.2参照)．そのような集合は，少なくとも60° の範囲内のあらゆる方向の単位長の線分を確かに含んでいる．難しいのは，このような方法でいくらでも小さい面積をもつ集合が得られることを示すことである．

補題 7.1

T_1 と T_2 は，それぞれ高さが h，底辺の長さが b の互いに隣接した平面内の三角形で，それらの底辺は同じ直線 L 上に乗っているとする．また，$\frac{1}{2}<\alpha<1$ を定数とする．次に，T_2 を T_1 と重なるように $2(1-\alpha)b$ ほど L に沿って平行移動させる．このとき，できあがった図形 S は全体の三角形 $T_1\cup T_2$ と相似な三角形 T (図7.1の薄く塗られた部分)と 2つの小三角形から成り立っており，T の面積は $\mathcal{L}^2(T)=\alpha^2\mathcal{L}^2(T_1\cup T_2)$ によって与えられる．また，$T_1\cup T_2$ と S の面積の差は，

$$\mathcal{L}^2(T_1\cup T_2)-\mathcal{L}^2(S)=(1-\alpha)(3\alpha-1)\mathcal{L}^2(T_1\cup T_2)$$

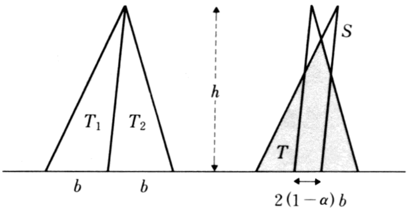


図 7.1

によって与えられる．($\mathcal{L}^2$は2次元ルベーグ測度を表わす．)

証明　図7.1より，TおよびSの面積は容易に求めることができる．(この計算は，アフィン変換に関して不変であることに注意しよう．)　□

定理 7.2

Tは平面内の三角形とし，その底辺を含む直線をLとする．また，Tを含むような任意の開集合をVとおく．さて，Tの底辺を2^k等分して，Tと同じ高さの2^k個の基本三角形を作り，左から順に$T_1, \cdots, T_{2^k}$とする．このとき，kさえ十分に大きくとれば，Lに沿って各基本三角形を適当に平行移動させることによって，できあがった図形Sの面積をいくらでも小さくでき，かつ$S \subset V$を満たすようにできる．

証明　このような図形Sは，固定したαに対して，前の補題を繰り返し適用することによって構成される．まず，隣接する基本三角形の組を考える．すなわち，各$1 \leq i \leq 2^{k-1}$に対し，補題7.1に従ってT_{2i}をLに沿ってT_{2i-1}と重なるように動かし，$T_{2i-1} \cup T_{2i}$と相似な三角形T_i^1と2つの小三角形からなる図形S_i^1を作る．このとき，$\mathcal{L}^2(T_i^1) = \alpha^2 \mathcal{L}^2(T_{2i-1} \cup T_{2i})$であり，また$T_{2i-1} \cup T_{2i}$と$S_i^1$の面積の差は$(1-\alpha)(3\alpha-1)\mathcal{L}^2(T_{2i-1} \cup T_{2i})$である．したがって，

$$\mathcal{L}^2(\bigcup S_i^1) \leq \sum \mathcal{L}^2(S_i^1) = \mathcal{L}^2(T) - (1-\alpha)(3\alpha-1)\mathcal{L}^2(T)$$

が成り立つ．次に，隣りどうしのS_i^1の組を考えよう．すなわち，各$1 \leq i \leq 2^{k-2}$に対し，S_{2i}^1をLに沿ってS_{2i-1}^1と重なるように動かして図形S_i^2を作るのであるが，T_{2i-1}^1とT_{2i}^1の向かい合う辺の長さは等しく平行であるから，この2つの三角形が補題7.1の構成法に従って重なるようにS_{2i}^1を動かすものとする．

このとき，T^1_{2i-1} と T^1_{2i} が重なってできる図形は，$\mathcal{L}^2(T^2_i)=\alpha^2[\mathcal{L}^2(T^1_{2i-1})+\mathcal{L}^2(T^1_{2i})]$ を満たす三角形 T^2_i を含み，また S^1_{2i-1} と S^1_{2i} の重なる部分の面積は T^1_{2i-1} と T^1_{2i} の重なる部分の面積

$$\begin{aligned}&(1-\alpha)(3\alpha-1)[\mathcal{L}^2(T^1_{2i-1})+\mathcal{L}^2(T^1_{2i})]\\&\qquad=(1-\alpha)(3\alpha-1)\alpha^2\mathcal{L}^2(T_{4i-3}\cup T_{4i-2}\cup T_{4i-1}\cup T_{4i})\end{aligned}$$

より大きいことがわかる．したがって，

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^2(\bigcup S^2_i)&\leq\sum\mathcal{L}^2(S^2_i)\\&\leq\sum\{\mathcal{L}^2(S^1_{2i-1})+\mathcal{L}^2(S^1_{2i})\\&\qquad-(1-\alpha)(3\alpha-1)[\mathcal{L}^2(T^1_{2i-1})+\mathcal{L}^2(T^1_{2i})]\}\\&\leq\mathcal{L}^2(T)-(1-\alpha)(3\alpha-1)(1+\alpha^2)\mathcal{L}^2(T)\end{aligned}$$

を得る．同様にして，各 $1\leq i\leq 2^{k-r}$ に対し，S^r_{2i} を L に沿って S^r_{2i-1} と重なるように動かして図形 S^{r+1}_i を作る．ただし，補題 7.1 の構成法に従って T^r_{2i-1} と T^r_{2i} を重ねるものとする．このとき，T^r_{2i-1} と T^r_{2i} の重なる部分の面積は，対応する基本三角形の面積の和の $(1-\alpha)(3\alpha-1)\alpha^{2r}$ 倍になることがわかる．こうして最終的に図形 S^k_1 を得るまで続けるのである．この図形を S としよう．(図 7.2 は $k=3$ の場合の構成法を示している．) この S に対しては，次の不等式

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^2(S)&\leq\mathcal{L}^2(T)-(1-\alpha)(3\alpha-1)(1+\alpha^2+\cdots+\alpha^{2(k-1)})\mathcal{L}^2(T)\\&=\left(1-\frac{(3\alpha-1)(1-\alpha^{2k})}{1+\alpha}\right)\mathcal{L}^2(T)\end{aligned}$$

が成り立つ．したがって，α を十分に 1 に近づけて(このとき $(3\alpha-1)/(1+\alpha)$ も 1 に近づく)，さらに，k を十分大きくとることによって，$\mathcal{L}^2(S)$ をいくらでも小さくすることができる．

次に，もとの三角形 T の底辺の長さを b とする．上述の構成法からわかるように(T_1 は全く動かしていないことに注意)，各基本三角形には b 以下の平行移動しか施していないことがわかる．したがって，任意に小さい正数 ε に対して，まず T の底辺を分割して底辺の長さが ε 以下であるようないくつかの小三角形を作っておいて，これらの各小三角形に対して上述の構成法に従って樹木状の集合 S を作るならば，各基本三角形は高々 ε しか動かしていないことから，ε を十分小さくとれば，$S\subset V$ を満たすようにできるのである． □

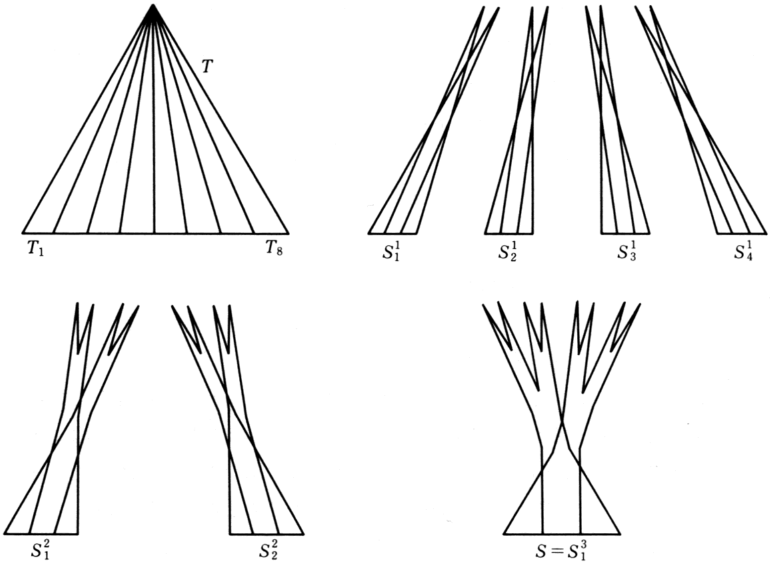


図 7.2

三角形 T の底辺を m 等分して m 個の基本三角形を作り，各基本三角形を底辺に沿って平行移動させて得られる図形の面積の最小値 A_m を決定するのは興味ある問題である．Schoenberg (1962*a*, 1962*b*) は $m\to\infty$ のとき $A_m=O(1/\log m)$ となることを示したが，A_m が m に関して単調に減少するのかどうかさえ知られていない．しかしながら，上述の定理の証明において必要なことは $\lim_{m\to 0} A_m=0$ ということのみである．さて，いよいよ定理 7.2 を用いて，ベシコヴィッチ集合を構成しよう．

定理 7.3

あらゆる方向の線分を含むような平面内のルベーク測度 0 のコンパクト集合が存在する．

証明　まず，60° の範囲内のあらゆる方向の線分を含むような平面内の測度 0 のコンパクト集合 F を構成しよう．F を 60° および 120° に回転した図形との和を考えれば，求める集合が得られることがわかる．

そのような集合 F は，定理7.2を繰り返し適用することによって構成される．直線 L 上に底辺をもつような高さ1の正三角形 S_1 から出発しよう．S_1 を含み $\mathcal{L}^2(\bar{V}_1)\leq 2\mathcal{L}^2(S_1)$ を満たすような開集合を V_1 とする($\bar{V}$ は V の閉包を表わす)．すると定理7.2より，S_1 を基本三角形に分割して，それらを L に沿って適当に平行移動させることによって，$\mathcal{L}^2(S_2)\leq 2^{-2}$ かつ $S_2\subset V_1$ を満たすような図形 S_2 を得る．このとき，S_2 は三角形の有限和であるから，$S_2\subset V_2\subset V_1$ かつ $\mathcal{L}^2(\bar{V}_2)\leq 2\mathcal{L}^2(S_2)$ を満たす開集合 V_2 が存在する．次に，S_2 を構成する各基本三角形を第2次の基本三角形に分割して，それらを L に沿って適当に平行移動させることによって，$\mathcal{L}^2(S_3)\leq 2^{-3}$ かつ $S_3\subset V_2$ を満たす図形 S_3 を得る．この S_3 を含み，$\mathcal{L}^2(\bar{V}_3)\leq 2\mathcal{L}^2(S_3)$ を満たすような開集合を V_3 とする．以下同様の操作を続けることによって，L 上に底辺をもち高さが1の基本三角形の有限和である樹木状の図形列 $\{S_i\}$ と，各 i について $S_i\subset V_i\subset V_{i-1}$ および

$$\mathcal{L}^2(\bar{V}_i)\leq 2\mathcal{L}^2(S_i)\leq 2^{-i+1}$$

を満たすような開集合列 $\{V_i\}$ を得る．さて，コンパクト集合 $F=\bigcap_{i=1}^{\infty}\bar{V}_i$ が求める集合であることを示そう．まず確かに $\mathcal{L}^2(F)=0$ が成り立つ．一方，構成法から明らかに，各 S_i および各 $\bar{V}_i$ は60°の範囲内のあらゆる方向の単位長の線分を含んでいる．そこで，θ をそのような任意の角度とすれば，各 i について $M_i\subset\bar{V}_i$ を満たすような θ 方向の単位長の線分 M_i が存在する．このとき，一般性を失うことなく，列 $\{M_i\}$ はハウスドルフの距離の意味で，ある θ 方向の単位長の線分 M に収束しているとしてよい．ところで，$\{\bar{V}_i\}$ は単調減少列であるから，任意の $i\geq j$ に対して $M_i\subset\bar{V}_j$ が成り立ち，したがって $M\subset\bar{V}_j$ を得る．ゆえに，j は任意であるから，$M\subset\bigcap_{i=1}^{\infty}\bar{V}_i=F$ が成り立つのである．□

ベシコヴィッチ集合を構成するさまざまな別方法が考案されている．例えば，Kahane(1969)は，x 軸上のカントール集合の各点とそれに平行な位置にあるカントール型集合の各点とを結ぶことによって，そのような集合が得られることを指摘した．また，Kinney(1970)およびAlexander(1975)も参照のこと．双対性を用いる方法については，7.3節にて議論する．

同様の構成法が**ニコディム集合**(Nikodym set)を構成する際にも用いられ

る．ここで，ニコディム集合とは，$\mathcal{L}^2(F)=1$を満たすような単位正方形内の集合Fで，あらゆる点$x\in F$において，xを通りFとの共通部分が点xのみであるような直線が存在するような集合のことである．（このとき，Fの各点は**線形到達可能**(linearly accessible) であるといわれる．）Nikodym(1927)は，Banachの問題に答えるために，このような集合を構成したのである．その後，Davies(1952*a*)は，Nikodymの複雑な構成法を簡単化し，もっと強く，あらゆる点$x\in F$において，xを通りFとの共通部分が点xのみであるような直線が非可算個存在するような集合も構成することができることを示した．（これらの構成法は，またde Guzmán(1975, 1979, 1981)，Casas(1978) およびCasas & de Guzmán(1981) に記述されている．）Davies(1952*a*) は，同様の方法を用いて，次の驚くべき結果を得たが，ここではその証明は省略する．

定理 7.4

有限の$\mathcal{L}^2$測度をもつ平面内の任意の集合Gに対し，$G\subset F$かつ$\mathcal{L}^2(G)=\mathcal{L}^2(F)$を満たすような直線の和集合$F$が存在する．

Larman(1971*a*) は，彼のいう**不可能集合**(impossible set) を構成するのに同様の構成法を用いている．不可能集合というのは，$\mathbb{R}^n$ $(n\geq 3)$ 内の互いに交わらない閉線分からなるコンパクト集合Fで，各線分から両端点を取り除いた開線分の対応する和集合をGとするとき，$\mathcal{L}^n(F)>0$かつ$\mathcal{L}^n(G)=0$を満たすような集合のことである．つまり，Fの測度は線分の端点の集合に集中しているわけである（このような集合を$\mathbb{R}^2$内で構成することは不可能である）．

次に，定理7.2を用いて掛谷問題の解を与えよう．まず次の補題を示す．

補題 7.5

平面内の平行な2直線をL_1, L_2とする．このとき，任意の$\varepsilon>0$に対して，L_1とL_2を含む集合Eで，$\mathcal{L}^2(E)<\varepsilon$を満たし，かつ$L_1$内の単位長の線分を$E$内で連続的に動かすことによって$L_2$内に移動することができるようなものが存在する．

証明　x_1とx_2をそれぞれL_1とL_2上の点とする．さて，図7.3に図示したように，L_1とL_2，x_1とx_2を結ぶ線分Mおよび各$i=1,2$に対して頂点がx_i

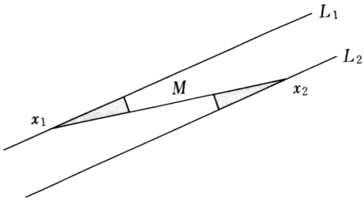


図 7.3

で M と L_i とで囲まれた単位扇形からなる集合を E とする．このとき，x_1 と x_2 を十分に離しておけば，E の面積はいくらでも小さくすることができる．また明らかに，L_1 上の単位長の線分を E 内の平行移動と回転によって L_2 上に移すことができる．□

定理 7.6

任意の $\varepsilon>0$ に対して，$\mathcal{L}^2(E)<\varepsilon$ を満たす平面内の集合 E で，単位長の線分を E 内で連続的に動かして $180°$ 反転させることができるようなものが存在する．

証明　まず，$\mathcal{L}^2(E_0)<\dfrac{1}{3}\varepsilon$ を満たす集合 E_0 で，単位長の線分を E_0 内でうまく動かすことによって最初の方向より $60°$ 回転した方向に向けることができるようなものを構成しよう．このような集合を $60°$ および $120°$ 回転したものとの和集合をとることによって，求める集合を得ることができる．（必要であれば，E_0 とそれを回転した集合とをつなぐ集合として補題 7.5 で述べたような集合を付け加えればよい．）

さて，T を高さ 1 の正三角形とし，その底辺を含む直線を L とする．すると，定理 7.2 より，T の底辺を $m=2^k$ 等分して m 個の基本三角形を作り，L に沿って適当に平行移動したものを $T'_1, \cdots T'_m$ とすれば，$\mathcal{L}^2(\bigcup_1^m T'_i)<\varepsilon/6$ を満たすようにできるのであった．そこで $E_1=\bigcup_1^m T'_i$ とおこう．ところで，各 i に対して，T'_i と T'_{i+1} の向かい合う辺は平行であることに注意しよう．したがって，各 i について，補題 7.5 で述べたような $\varepsilon/6m$ 以下の面積の集合を E_1 に付け加えることによって，T'_i に含まれる単位長の線分をその集合内で連続的に動かすことによって T'_{i+1} 内に移動させることができる．この集合の面積は高々 $\dfrac{1}{6}\varepsilon+\dfrac{1}{6}(m-1)\varepsilon/m<\dfrac{1}{3}\varepsilon$ であるから，これが求める集合である．□

7.3 双対原理

この節では，第3章および第6章で述べた線形可測集合の理論とベシコヴィッチ集合との関係を述べよう．基本的には，直線と点を対応させ，ある方向への集合 E の射影と，E の各点に対応する直線群とある固定された直線との共通部分とが幾何学的に相似になるようにするのである．こうして，E をいろいろな方向に射影することによって，対応する直線の集合を研究することができる．

Besicovitch(1964a) は，次のような**極相反**(polar reciprocity)の方法を用いた．すなわち，原点以外の点 x をベクトルとみなし，これに垂直で原点からの距離が $1/|x|$ であるような直線を $L(x)$ とする．この $L(x)$ を単位円 C に関する点 x の**極直線**(polar line)という．自然に，原点を通る直線は無限遠点に対応する．すると，容易にわかるように，$x\in L(y)$ であることと $y\in L(x)$ であることとは同値であるという基本性質が成り立つ．したがって，原点を通る θ 方向の直線 L_θ への正射影を proj_θ と書けば，任意の集合 E に対して，L_θと直線群 $\{L(x): x\in E\}$ との共通部分は，単に単位円 C に関する $\mathrm{proj}_\theta E$ の幾何学的な反転にすぎないことがわかる．こうして，第6章における射影に関する定理を用いて，このような直線群と直線との共通部分を研究することができる．

しかしながら，ここでは，その基本的な考え方は同じであるが，技術的な理由から，次のような直線と点の対応を導入した方が便利である．平面内の集合を考える限り，(x,y) は平面の直交座標を表わすものとする．

任意の $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ に対し，$y=a+bx$ で表わされる直線を $L(a,b)$ と書く．任意の集合 $E\subset\mathbb{R}^2$ に対し，$L(E)=\bigcup_{(a,b)\in E}L(a,b)$ とおく．また，定数 c に対し，$x=c$ で表わされる直線を L_c と書く．すると，

$$L(a,b)\cap L_c=(c,a+bc)=(c,(a,b)\cdot(1,c)),$$

ただし，「・」は通常の $\mathbb{R}^2$ の内積である．したがって，$E\subset\mathbb{R}^2$ に対し，

$$L(E)\cap L_c=\{(c,(a,b)\cdot(1,c)): (a,b)\in E\}$$

であるから，原点を通り x 軸と θ の角をなす直線 L_θ への正射影を proj_θ と書けば，$c=\tan\theta$ のとき，$L(E)\cap L_c$ は $\mathrm{proj}_\theta E$ と幾何学的に相似であり，その

相似比は $(1+c^2)^{\frac{1}{2}}$ であることがわかる．特に，

$$\mathcal{L}^1(L(E)\cap L_c)=0 \Longleftrightarrow \mathcal{L}^1(\mathrm{proj}_\theta E)=0 \tag{7.1}$$

が成り立つ．さらに，y 軸への射影に関しては，明らかに $\mathrm{proj}_{\pi/2}(a,b)=b$ が直線 $L(a,b)$ の傾きを表わすことから，$b\in\mathrm{proj}_{\pi/2}E$ ならば，$L(E)$ は傾き b の直線を含んでいることがわかる．

次の定理は，E が線形可測集合の場合に $L(E)$ の基本性質を述べたものである．

定理 7.7

E を $\mathbb{R}^2$ 内の 1 集合とする．このとき，$L(E)$ は $\mathbb{R}^2$ 内の $\mathcal{L}^2$ 可測集合である．さらに，E が非正則であるかあるいは正則であるかに従って，それぞれ $\mathcal{L}^2(L(E))=0$ あるいは $\mathcal{L}^2(L(E))>0$ が成り立つ．

証明　少し厄介なのは $L(E)$ の可測性の証明であろうが，本質的には難しくない(Besicovitch の論文を論評した Croft(1965) の注釈を参照のこと)．以下に，$L(E)$ の可測性を示そう．E が開集合であれば，明らかに $L(E)$ も開集合になるし，E が閉集合であれば $L(E)$ も閉集合になる．したがって，E が G_δ 集合(開集合の可算個の共通部分)あるいは F_σ 集合(閉集合の可算和)であれば，$L(E)$ もそれぞれ同じ型の集合になることがわかる．

以上のことから，まず $\mathcal{H}^1(F)=0$ であれば $\mathcal{L}^2(L(F))=0$ となることが従う．なぜなら，$\mathcal{H}^1$ の正則性(定理 1.6)より，$\mathcal{H}^1(F_0)=0$ を満たすような G_δ 集合 $F_0\supset F$ が存在する．すると定理 6.1 から，任意の θ に対し $\mathcal{L}^1(\mathrm{proj}_\theta(F_0))=0$ が成り立ち，(7.1) の双対性から，任意の c に対し $\mathcal{L}^1(L(F_0)\cap L_c)=0$ が成り立つ．ところで，$L(F_0)$ は G_δ 集合であるから $\mathcal{L}^2$ 可測集合であり，Fubini の定理より $\mathcal{L}^2(L(F_0))=0$ を得る．ゆえに，$L(F)\subset L(F_0)$ だから $\mathcal{L}^2(L(E))=0$ が従い，$L(F)$ は $\mathcal{L}^2$ 可測集合である．

さて，E を任意の 1 集合とすると，$\mathcal{H}^1$ の正則性から，$E=E_0\cup F$ のように分解することができる．ただし，E_0 は F_σ 集合であり，F は $\mathcal{H}^1(F)=0$ を満たしている．したがって，$L(E)=L(E_0)\cup L(F)$ は，可測集合の和として，明らかに $\mathcal{L}^2$ 可測集合になるのである．

E が非正則な 1 集合であれば，定理 6.13 より，ほとんどすべての方向 θ に対して $\mathcal{L}^1(\mathrm{proj}_\theta E)=0$ が成り立つ．すると，(7.1) の双対性から，ほとんど

すべての c に対して $\mathcal{L}^1(L(E)\cap L_c)=0$ が成り立ち，$L(E)$ の $\mathcal{L}^2$ 可測性とFubiniの定理より，$\mathcal{L}^2(L(E))=0$ が従う．

E が正則な1集合であれば，定理6.10より，ほとんどすべての方向 θ に対して $\mathcal{L}^1(\mathrm{proj}_\theta E)>0$，したがって(7.1)の双対性より，ほとんどすべての c に対して $\mathcal{L}^1(L(E)\cap L_c)>0$ が成り立つ．したがって，$L(E)$ の $\mathcal{L}^2$ 可測性とFubiniの定理より，$\mathcal{L}^2(L(E))>0$ が従う．　□

Besicovitch(1964*a*)は，もし E が正則な1集合ならば，被覆の重複度も考えると $L(E)$ の面積は必ず無限大になることを示した．一方，Davies(1965)は $\mathcal{L}^2(L(E))<\infty$ を満たすような正則1集合 E を構成し，被覆の重複度を考えるかどうかが本質的に重要であることを示した．(これらの論文は極相反法による直線と点の対応を用いているが，いま考えている対応との間には局所的に実解析的な全単射が存在することから，同一の直線集合に対応する点集合の正則性は一致していることがわかる.)

さて，この双対原理を用いてベシコヴィッチ集合の簡単な構成法を示そう．実際，あらゆる方向の(線分ではなくて)直線を含むような測度0の集合の存在を示す次の定理は，定理7.3よりも強い結果を与えている．

定理 7.8

あらゆる方向の直線を含むような平面内の $\mathcal{L}^2$ 測度0の集合が存在する．

証明　定理3.32で構成した集合に可算個の点を付け加えてコンパクト集合にし，さらにそれを x 軸に関して折り返した集合との和集合を E とする．E は $\mathbb{R}^2$ 内の非正則な1集合で，E の y 軸への射影 $\mathrm{porj}_{\pi/2}E$ は線分 $-1\leq y\leq 1$ を含んでいる．まず，定理7.7より，$\mathcal{L}^2(L(E))=0$ を得る．また，定理7.7の前に述べた注意により，$L(E)$ は -1 と 1 の間の任意の傾きをもつ直線を含んでいることがわかる．こうして，$L(E)$ を $\frac{1}{2}\pi$ ほど回転させた集合と $L(E)$ との和集合を考えれば，これが求める $\mathbb{R}^2$ 内の集合であることがわかる．　□

Davies(1971)は，双対原理を応用して，ベシコヴィッチ集合は必然的に「大きな」集合でなければならないという次の結果を示した．

定理 7.9

Fを，あらゆる方向の直線を含んでいるような平面内の集合とする．このとき，Fのハウスドルフ次元は2である．

証明 容易に示すことができるように，任意の集合は，それと同じハウスドルフ次元をもつようなG_δ集合に含まれる．したがって，一般性を失うことなく，FはG_δ集合であるとしてよい．このとき，集合$E=\{(a,b): L(a,b)\subset F\}=\bigcap_{r=1}^{\infty}\{(a,b): L(a,b)\cap B_r(0)\subset F\cap B_r(0)\}$も$G_\delta$集合になることがわかる．さて，$F$はあらゆる傾きの直線を含んでいるから，$\mathrm{proj}_{\pi/2}E$は$y$軸全体と一致している．したがって，補題6.1より，$\mathcal{H}^1(E)=\infty$，すなわち$\dim E\geq 1$である．そこで，定理6.8を用いて，ほとんどすべての方向θに対して$\dim(\mathrm{proj}_\theta E)=1$を得る．ゆえに，双対原理から，ほとんどすべての$c$に対して$\dim(L(E)\cap L_c)=1$が成り立つ．すると，定理5.8を用いて$\dim L(E)=2$を示すことができる．したがって，$L(E)\subset F$であるから，$\dim F=2$を得る． □

上述の証明を少し修正することによって，Davies(1971)は，あらゆる方向の線分を含むような平面内の集合Fに対しても，$\dim F=2$となることを示した．実際，さらに強い結果が成立する．すなわち，$\dim F<2$を満たすような集合Fと，ほとんどすべての方向のあらゆる直線との共通部分は1次元測度0である．この事実は，基本的には同様の方法により，6.3節の終わりで述べたMarstrand流の射影定理を用いることによって証明される．（この方法はFalconer(1980*b*)によって高次元空間の場合に応用された．）

Besicovitch & Rado(1968)（これはBesicovitchの最後の論文である）およびKinney(1968)は，直線の代わりに曲線に関する問題を考察し，あらゆる半径の円を含むような平面内の測度0の集合を直接に構成した．これに対して，Davies(1972)は，円に関する問題も双対原理を用いることによって解くことができることを示したのである．

定理 7.10

あらゆる半径の円を含むような平面内の$\mathcal{L}^2$測度0の集合が存在する．

証明 定理3.32で構成した集合Eを考える．Eは有界な非正則1集合で，

x 軸への射影 $\mathrm{proj}_0 E$ は線分 $0 \leq x \leq 1$ を含んでいる．さて，ϕ: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を次のように定めよう：

$$\phi(x, y) = (x(1+y^2)^{\frac{1}{2}}, y).$$

このとき，任意の $0 \leq x \leq 1$ に対して，$(x, y) \in E$ を満たす y が存在することから，$\phi(E)$ の中に $(x(1+y^2)^{\frac{1}{2}}, y)$ なる点を見出すことができる．簡単のために，この点を $(a, b) \in \phi(E)$ とおけば $x = a(1+b^2)^{-\frac{1}{2}}$ であるが，この値はまさに直線 $L(a, b)$ の原点からの距離を表わしている．つまり，$L(\phi(E))$ に含まれる直線の原点からの距離は 0 と 1 の間の任意の値をとりうるのである．また，ϕ は実解析的な全単射であるから(ϕ は任意の長さ有限の曲線を長さ有限の曲線に写す)，$\phi(E)$ も非正則な 1 集合となる．したがって，定理 7.7 より，$\mathcal{L}^2(L(\phi(E))) = 0$ を得る．さて，この $L(\phi(E))$ を単位円に関して反転した集合を F とおく．(すなわち，極座標表示における変換 $(r, \theta) \to (1/r, \theta)$ による $L(\phi(E))$ の像を F とする．) 明らかに，この変換によって測度 0 の集合は測度 0 の集合に写され，また原点からの距離が x であるような直線は原点を通る半径 $1/(2x)$ の円に写される．したがって，F は測度 0 の集合であり，$\frac{1}{2}$ 以上のあらゆる半径の円を含んでいることがわかる．そこで，F に相似で，相似比が 0 に収束するような集合列の可算和を考えれば，これが求める性質をもつ集合であることがわかる．　□

上述の定理に関連して，あらゆる点を中心にもつような円を含む平面内の測度 0 の集合が存在するのかどうかという自然な問題が生じるが，この興味ある問題はまだ解決されていない．

Davies の定理 7.4 に双対原理を応用することによって，次のような驚くべき結果を得ることができる．粗く言えば，ほとんどすべての方向に対して，与えられた射影をもつような集合を見出すことができるというものであり，Talagrand (1980) の結果を一般化している．

定理 7.11

各 $\theta \in [0, \pi)$ に対して，G_θ は $\mathbb{R}$ 内の集合であり，$\{(\theta, y) : y \in G_\theta\}$ は $\mathcal{L}^2$ 可測集合であるとする．このとき，ほとんどすべての方向 θ に対して，$\{u\boldsymbol{\theta} : u \in G_\theta\} \subset \mathrm{proj}_\theta E$ かつ $\mathcal{L}^1(G_\theta) = \mathcal{L}^1(\mathrm{proj}_\theta E)$ を満たすような集合 $E \subset \mathbb{R}^2$ が存在

する．ただし，$\boldsymbol{\theta}$ は θ 方向の単位ベクトルである．

証明　与えられた G_θ に対して，

(7.2)　　$$G=\{(c,y):(1+c^2)^{-\frac{1}{2}}y\in G_\theta,\ ただし\ c=\tan\theta\}$$

とおく．明らかに G は $\mathcal{L}^2$ 可測集合である．定理 7.4 より，G を含むような直線集合 $L(E)$ が存在して，$\mathcal{L}^2(G)=\mathcal{L}^2(L(E))$ が成り立つ．すると，$G\cap L_c\subset L(E)\cap L_c$ であるから，Fubini の定理より，ほとんどすべての c に対して $\mathcal{L}^1(G\cap L_c)=\mathcal{L}^1(L(E)\cap L_c)$ が従う．一方，双対原理により，$L(E)\cap L_c$ は $\mathrm{proj}_\theta E$ と相似であり，その相似比は $(1+c^2)^{\frac{1}{2}}$ で与えられる．ただし，$c=\tan\theta$ である．したがって，(7.2) より，ほとんどすべての方向 θ に対して，$\{u\boldsymbol{\theta}: u\in G_\theta\}\subset\mathrm{proj}_\theta E$ かつ $\mathcal{L}^1(G_\theta)=\mathcal{L}^1(\mathrm{proj}_\theta E)$ の成り立つことがわかる．　□

最後に，高次元空間におけるベシコヴィッチ型集合の存在の可能性を，双対原理を用いて研究しよう．

定理 7.12

$\mathbb{R}^3$ 内の任意の平面に対し，それを平行移動した平面を必ず含むような $\mathbb{R}^3$ 内の $\mathcal{L}^3$ 測度 0 の部分集合は存在しない．

証明　$\mathbb{R}^3$ 内の点と平面をうまく対応させることによって，定理 7.9 と同様に証明することができる．まず，任意の $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ に対し，$z=a+bx+cy$ によって表わされる平面を $\Pi(a,b,c)$ と書く．任意の $E\subset\mathbb{R}^3$ に対し，$\Pi(E)=\bigcup_{(a,b,c)\in E}\Pi(a,b,c)$ とおく．また，定数 d,e に対して，$x=d$，$y=e$ によって表わされる直線を $L_{d,e}$ と書く．すると明らかに，

$$\Pi(a,b,c)\cap L_{d,e}=(d,e,a+bd+ce)=(d,e,(a,b,c)\cdot(1,d,e))$$

が成り立つ．ただし，「・」は $\mathbb{R}^3$ の内積である．ゆえに，任意の $E\subset\mathbb{R}^3$ に対し，

$$\Pi(E)\cap L_{d,e}=\{(d,e,(a,b,c)\cdot(1,d,e):(a,b,c)\in E\}$$

であるから，ベクトル $(1,d,e)$ の方向 θ の直線への正射影を proj_θ と書けば，集合 $\Pi(E)\cap L_{d,e}$ は $\mathrm{proj}_\theta E$ と幾何学的に相似であることがわかる．したがって特に，

(7.3)　　$$\mathcal{L}^1(\Pi(E)\cap L_{d,e})=0\Longleftrightarrow\mathcal{L}^1(\mathrm{proj}_\theta E)=0$$

が成り立つ.

さて，$\mathbb{R}^3$ 内の任意の平面に対し，それを平行移動した平面を必ず含むような集合 $F\subset\mathbb{R}^3$ を考える．以下に，F の $\mathcal{L}^3$ 測度が 0 であるとして矛盾を導こう．一般性を失うことなく，F は G_δ 集合であるとしてよい．このとき，容易に確かめることができるように，$E=\{(a,b,c):\Pi(a,b,c)\subset F\}$ も G_δ 集合になる．ところで，$x=0$ で表わされる平面を Π とすれば，明らかに $\mathrm{proj}_\Pi E$ は Π 全体となるから，補題 6.1 より，$\mathcal{H}^2(E)=\infty$ を得る．したがって，$\dim E\geq 2$ であり，定理 6.9(b) よりほとんどすべての方向 θ に対して $\mathcal{L}^1(\mathrm{proj}_\theta E)>0$ を得る．ゆえに，(7.3) の双対性より，ほとんどいたるところの $(d,e)\in\mathbb{R}^2$ に対して，$\mathcal{L}^1(\Pi(E)\cap L_{d,e})>0$ を得る．このとき，$\Pi(E)$ は $\mathcal{L}^3$ 可測集合であるから，Fubini の定理より，$\mathcal{L}^3(\Pi(E))>0$ が従う．$\Pi(E)\subset F$ であるから，これは矛盾である．　□

上述の証明を少し修正すれば，$\mathbb{R}^3$ 内の任意の測度 0 の集合に対し，ほとんどすべての方向に垂直なあらゆる平面との共通部分の $\mathcal{L}^2$ 測度が 0 になることを示すことができる．

高次元空間において，ベシコヴィッチ型の集合が存在するかどうかは，かなり興味深い問題である．$\mathbb{R}^n$ 内の部分集合 E が (n,k) 型ベシコヴィッチ集合であるとは，E の n 次元ルベーグ測度が 0 であるにもかかわらず，$\mathbb{R}^n$ 内の任意の k 次元部分空間に対して，それを平行移動した空間を E が必ず含んでいるときにいう．定理 7.8 は，したがって，(2,1) 型ベシコヴィッチ集合の存在を示しているわけである．また，各 $n\geq 3$ に対し，そのような集合と $\mathbb{R}^{n-2}$ との直積集合は明らかに $(n,1)$ 型ベシコヴィッチ集合になることがわかる．一方，Marstrand (1979*b*) は，直接に被覆を用いて，(3,2) 型集合の存在しないことを示した．Falconer (1980*a*) は，フーリエ変換を用いて，$k>\frac{1}{2}n$ ならば (n,k) 型ベシコヴィッチ集合の存在しないことを示した．また，Oberlin & Stein (1982) は関数解析学に関連して $(n,n-1)$ 型集合を論じた．これについては，定理 7.12 の証明を一般化して，容易に $(n,n-1)$ 型ベシコヴィッチ集合の非存在を示すことができる．一般の (n,k) 型集合については，Falconer (1980*b*) が，双対原理と射影に関する定理を用いて，$2\leq k\leq n-1$ ならば (n,k) 型ベシコヴィッチ集合の存在しないことを示した．次の定理は，これを最も一般的な形で述

べたものである.

定理 7.13
$2 \leq k \leq n-1$ とし，F を $\mathbb{R}^n$ 内の n 次元ルベーク測度 0 の集合とする．このとき，$\mathbb{R}^n$ 内のほとんどすべての k 次元部分空間 Π に対して(グラスマン多様体 $G_{n,k}$ 上の通常の不変測度の意味で)，Π を平行移動した空間と F との共通部分の k 次元測度は 0 である.

7.4 一 般 化

この節では，ベシコヴィッチ集合および掛谷集合の構成に関連したいろいろな結果を述べよう．(これらの結果のいくつかは Croft の未発表原稿にも述べられている．また，Davies (1971)，Cunningham (1974) および Taylor (1975) も参照のこと.)

まず，次のように問題を一般化しよう．すなわち，与えられた幾何学図形の族に属する任意の図形に対して，それを平行移動あるいは合同変換した図形を必ず含むような測度 0 の集合が存在するかどうかという問題を考える．ベシコヴィッチ集合は，平面内のあらゆる直線からなる族に対する肯定的な解を与えているわけである.

容易にわかるように，カントール集合 E はルベーグ測度 0 であるにもかかわらず，E に属する 2 点間の距離は $(0,1)$ 内の任意の値をとりうる．このことを利用して，Kinney (1968) は，「カントールの格子模様」$(E\times[0,1])\cup([0,1]\times E)$ が $\mathcal{L}^2$ 測度 0 であるにもかかわらず，辺の長さが 1 より小さいあらゆる長方形を合同変換したものを必ず含んでいることを見出した．したがって，このような集合を平面内に規則正しく敷きつめた集合は，$\mathcal{L}^2$ 測度 0 であるにもかかわらず，あらゆる長方形を合同変換したものを必ず含んでいることがわかる．Ward (1970*a*, 1970*b*) は，あらゆる多角形を合同変換したものを必ず含むような平面内の測度 0 の集合を構成した．実際，あらゆる n 角形を合同変換したものを必ず含むような平面内のハウスドルフ次元 $2-1/n$ の集合を構成したのである．また，Davies (1971) は，Besicovitch による構成法を修正して，あ

らゆる折れ線を平行移動したものを必ず含むような測度0の集合を構成した．定理7.9のすぐ後の注意によって，このような集合のハウスドルフ次元は2でなければならないことがわかる．一方，Marstrand(1972)は，任意の位相測度空間に応用できるような非常に強力ないくつかの結果を得た．その中でも特に，任意の直線の可算和を平行移動したものを必ず含むような測度0の集合が存在すること，また，任意の直線の可算和を合同変換したものを必ず含むようなハウスドルフ次元1の集合が存在することを示した．

もう1つの興味ある問題として，測度0の集合の中に曲線を詰め込む問題がある．定理7.10で示したように，あらゆる半径の円を含むような平面内の測度0の集合が存在する．しかし，あらゆる平面内の点を中心とする円を含むような測度0の集合が存在するかどうかは未解決問題であった．さらに，あらゆる楕円，円すい曲線，あるいは各$k>1$に対してk次のあらゆる代数曲線を合同変換したものを必ず含むような平面内の測度0の集合が存在するかどうかという問題が考えられる．このような集合は存在しないであろうと一般に予想されてはいるが，問題に内在する非線形性のために，これらの問題は非常に難しくてまだ何も証明されていないのである．Falconer(1982)は，そのような集合の次元および$\mathbb{R}^n$ $(n\geq 3)$内の高次元曲面による詰め込み問題に関して比較的弱い結果を得た．また，調和解析学における最大定理を用いて，高次元空間における詰め込み問題に関する結果を導くことができる．これに関しては，次の7.5節を参照していただきたい．

この方面において最も重要な進展をもたらしたのは，疑いなくMarstrand(1979*a*)である．彼は，$\mathbb{R}^n$ $(n\geq 2)$内の任意のn次元測度0の集合Fに対し，ある長さ1のC^∞級曲線Γが存在して，Γをどのように合同変換してもFに含まれるようにはできないことを示して，**虫の問題**(すなわち，長さ1の「虫」にとって最小の快適な居住空間は何か？)を解決したのである．実際には，もっと強く，Γを含むある領域上で定義されたどのような可逆な実解析的写像によっても，ΓをFの内部に写すことはできないことを示した．その証明には，全有界な距離空間に対するエントロピー，すなわち，十分小さい正数εに対するε被覆の個数に関する評価が用いられる．

さて，次のような逆の形の詰め込み問題も考えられる．すなわち，与えられた集合族に属する集合をどのように合同変換あるいは相似変換したものも含ま

ないような正の測度をもつ集合が存在するだろうか？ これに関して最もよく知られた結果は，ℝ内の正の測度をもつ集合に属する2点間の距離は，ある正数 c に対して $(0,c)$ 内の任意の値をとりうるという Steinhaus(1920)の定理である．（練習問題1.7を参照のこと．また，Besicovitch & Miller(1948)，Besicovitch(1948)，Eggleston(1949) および Besicovitch & Taylor(1952)は，いろいろな一般化を考察している．）すでに述べたように，カントール集合は，（測度0の集合であるにもかかわらず）このような性質をもっている．Lebesgue の密度定理1.13は，この Steinhaus の定理を導くだけでなく，正の測度をもつℝ内の集合は，あらゆる有限集合に対し，それを相似変換したものを必ず含んでいるという結果も導くのである．これに関しては，Erdös が，有限集合のところを（収束する）可算点列で置き換えても同様のことが成立するだろうかという興味深い問題を提案した．その後 Falconer(1984) は，その部分的解決を与えている．さらに，いろいろな関連問題が Davies, Marstrand & Taylor(1960) および Darst & Goffman(1970) によって考察されている．

与えられた集合族に属する集合に対し，それを合同変換したものを必ず含むような最小の凸集合を求める問題は，幾何学的測度論よりはむしろ凸性の理論に属する問題である．Pál(1921) は，あらゆる方向の単位長の線分を含むような平面内の最小の凸集合は正三角形であることを示し，この章で述べた多くの研究に刺激を与えたのである．なお，高次元空間における類似の問題は未解決である．また，凸性に関連した諸問題が Eggleston(1957)，Besicovitch(1965 *b*)，Wetzel(1973) らによって考察されている．

さて，再び掛谷問題，すなわち，その集合の内部で単位長の線分をうまく動かして180°反転することができるような最小の集合を求める問題を考えよう．その最終的な解は Cunningham(1971) によって与えられた．実際，彼は，単位円に含まれる単連結な掛谷集合で，いくらでも小さい測度をもつようなものを構成したのである．同時に，彼は，最小の**星型**(starshaped)掛谷集合を考察し，その面積の下限は $\pi/108$ と $(5-2\sqrt{2})\pi/24$ の間にあることを示した．この結果は，以前の Walker(1952)，Blank(1963) および Cunningham & Schoenberg(1965) の評価を改良するものである．（E が星型集合であるとは，ある点 $x\in E$ を選んで，他の任意の点 $y\in E$ に対して，線分 $[x,y]$ が E に含まれるようにできるときにいう．）すでに述べたように，最小の凸掛谷集合は

高さ1の正三角形であることが Pál(1921) によって示された．3次元空間における類似の問題は未解決である．

Cunningham(1974) は，次のような3つの興味ある問題を考察している．まず最初に，彼は，球面上の集合の内部で大円上のある部分弧をうまく動かして180° 反転することができるような最小の集合の面積を求めた．その最小面積は，もちろん部分弧の張る角度に依存するのであるが，半円よりも小さい弧に対しては0になることが Wilker(1971) によってすでに示されていた．次に考察した問題は，平面内の集合の内部で一定角の円弧が半径を小さくしていって連続的に1点に縮まることができるような最小の集合を求めるという問題である．最後に，Cunningham の第3の問題を述べるために，まず「鳥型集合」を定義しよう．これは，1本の線分を「胴部」と考え，その両端点に「翼部」に相当する線分を固定せずに取り付けた集合のことである．彼は，任意の有界集合 E に対し，連続的に鳥型集合を動かして，胴部は E のすべての点を通過するにもかかわらず，その翼部は任意に小さい測度の集合内にとどまっているようにできることを示した．この問題は，調和解析学に応用できるだけでなく，線形到達可能な集合に関する Davies(1952a) の研究にも密接に関連している．

7.5　調和解析学との関係

本章の終わりにあたり，調和解析学との関係を述べよう．一方で，積分に関する一般のノルム評価から，ある種の詰め込みに関する結果を導くことができるし，他方，掛谷集合の構成法を用いて，調和解析学における主要な予想に対する反例を与えることができるのである．ただし，ここでは「調和解析学」を，フーリエ解析および微分法，最大作用素，乗法因子の理論を含む広大な数学の分野として広い意味で用いている．以下に，いくつかの例を通じて，両者の関係を述べることにしよう．

まず最初に，関数のノルム評価を用いて，3次元空間におけるベシコヴィッチ型集合の非存在(定理 7.12) を導こう．$\mathbb{R}^3$ 上で定義された可測関数 $f(x)$ に対し，$\|f\|_p=\left[\int_{\mathbb{R}^3}|f|^p\,\mathrm{d}x\right]^{1/p}$ とおく$(1\leq p<\infty)$．単位ベクトル $\boldsymbol{\theta}$ に垂直で，

原点からの(符号付きの)距離が t であるような平面上の f の積分を $F(t,\boldsymbol{\theta})$ とおく．すると，すべての単位ベクトル $\boldsymbol{\theta}$ に対し，$F(t,\boldsymbol{\theta})$ がほとんどいたるところの t で存在することが，Fubini の定理よりわかる．さて，可積分関数のフーリエ変換は有界になることを用いれば，F の t に関するフーリエ変換を $\boldsymbol{\theta}$ に関して積分することによって，

$$\int_{\theta}\operatorname*{ess\,sup}_{t}|F(t,\boldsymbol{\theta})|\,\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}\leq c(\|f\|_1+\|f\|_2) \tag{7.4}$$

を示すことができる．ただし，c は f に依存しない定数である．(Falconer (1980a) あるいは Oberlin & Stein (1982) を参照のこと．)

次に，E を $\mathcal{L}^3$ 測度 0 の集合とし，$F_0(\boldsymbol{\theta})$ を，ベクトル $\boldsymbol{\theta}$ に垂直な平面を動かしたときの，その平面と E の共通部分の $\mathcal{L}^2$ 外測度の上限としよう．容易に確かめられるように，F_0 は球測度に関して可測である．さて，ルベーグ測度の正則性より，E を含み測度が ε より小さいような開集合 V を考え，f を V の特性関数とすれば，$\|f\|_1=\|f\|_2<\varepsilon$ が成り立つ．V は E を含む開集合であるから，$F_0(\boldsymbol{\theta})\leq\operatorname*{ess\,sup}_{t}F(t,\boldsymbol{\theta})$ が成り立ち，(7.4) より，

$$\int F_0(\boldsymbol{\theta})\,\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}\leq 2\varepsilon c$$

を得る．ここで，$F_0(\boldsymbol{\theta})$ は非負関数であり，ε は任意であったから，ゆえに，ほとんどすべてのベクトル $\boldsymbol{\theta}$ に対して $F_0(\boldsymbol{\theta})=0$ が成り立つ．すなわち，ほとんどすべての方向のあらゆる平面と E との共通部分の $\mathcal{L}^2$ 測度は 0 である．したがって，あらゆる平面に対し，それを平行移動した平面を必ず含むような 3 次元空間内の測度 0 の集合は存在しない．

逆に，このような議論を用いて，関数のノルム評価に関する結果を導くこともできる．というのは，あらゆる方向の直線を含むような平面内の測度 0 の集合が存在する(定理 7.3)ことから，もし (7.4) のような評価式が $\mathbb{R}^2$ 上の関数に対して成立するとすれば($\boldsymbol{\theta}$ は平面内の単位ベクトルとして)，上述と同様の議論によって矛盾を導くことができるからである．つまり，平面内のベシコヴィッチ集合の存在が，(7.4) 式が平面上の関数に対しても成立するだろうという，一見もっともらしい予想の反例を与えているのである．

さて，定理 7.13 およびその前の注意で述べたように，$k>1$ ならば (n,k) 型ベシコヴィッチ集合は存在しない．これについて，Falconer (1980a) は，上述

の方法によって，$k>\frac{1}{2}n$ のときに (n,k) 型集合の非存在を示したのである．しかし，この方法をすべての場合に適用するのは難しいことから，$2\leq k\leq\frac{1}{2}n$ のときの (n,k) 型ベシコヴィッチ集合の非存在は，一般の関数のノルム評価からは導けないような本質的に幾何学的な性質なのかもしれない．

次に，球平均と球による詰め込み問題について述べよう．$\mathbb{R}^n$ 上の可測関数 f に対して，中心が x で半径が r の球面上の f の平均，すなわち，この球面上の f の積分を球面の $n-1$ 次元面積で割ったものを $F_r(x)$ と書く．さらに，

$$F(x)=\sup_{r>0}F_r(x) \tag{7.5}$$

とおく．このとき，Stein(1976) は，$n/(n-1)<p$ かつ $n\geq 3$ のときに，

$$\|F\|_p\leq c\|f\|_p \tag{7.6}$$

が成り立つことを示した．($F_r(x)$ を，中心が x で半径が r の閉球上の f の平均として定義するならば，$F(x)$ は Hardy–Littlewood の最大作用素になり，(7.6) はすべての n と $1<p<\infty$ に対して成立することが知られている．詳しくは de Guzmán(1975) を参照のこと．)

さて，(7.4) の代わりに (7.6) を用いて上述の方法を適用すれば，$\mathbb{R}^n$ $(n\geq 3)$ 内の任意の n 次元ルベーグ測度 0 の集合 E に対し，ほとんどいたるところの $x\in\mathbb{R}^n$ において，x 中心のすべての球面と E との共通部分の $n-1$ 次元球測度は 0 であることを導くことができる．

そこで，$n=2$ のときに何らかの p に対して (7.6) 式の成り立つことが証明されたならば，平面内の測度 0 の集合はすべての点に中心をもつような円を含むことはできないことになり，前に述べた未解決問題が解決されることになる．逆に，もし測度 0 の集合にそのような円の詰め込みを構成することができたならば，(7.6) 式が $p\leq 2$ だけでなくあらゆる p に対して成立しないことを示すことができる．$\mathbb{R}^2$ に関しては，いままでのところ，これ以外には何も知られていない．

(7.6) 式の証明には球の曲率が 0 でないことを本質的に用いる．Stein & Wainger(1978) は，「よい曲がり方の」曲面上の平均に対しても同様の不等式が成り立つことを示した．したがって，そのような曲面による詰め込み問題に関しても同様の結果を得ることができるが，ただし，立方体の表面のような面に対しては適用できない．

Lebesgue の密度定理において，閉球の代わりに別の集合を用いることによっていろいろな一般化が得られている．これに関しては，平面上の「適当な」関数 f に対して，r が 0 に近づくとき，ほとんどいたるところの x に対して，

$$(7.7)\qquad \inf\left\{\frac{1}{\mathcal{L}^2(R)}\int_R f\,\mathrm{d}\mathcal{L}^2 : R \text{ は } 0<|R|\leq r \text{ を満たすような中心 } x \text{ の長方形}\right\},$$

および下限を上限に置き換えたものがともに $f(x)$ に収束するであろうというもっともらしい予想がある(少なくとも連続関数に対しては正しい)．ところが，定理 7.3 の後で述べたニコディム集合を用いることによって，閉集合の特性関数に対してさえも，この予想が正しくないことを示すことができる．（このとき，長方形族は微分基を形成しないという．）というのは，ニコディム集合 E (すなわち，単位正方形内の測度 1 の部分集合で，E の各点 x に対し，x を通る直線と E との共通部分が点 x のみであるような直線が常に存在するような集合)に対し，$\mathcal{L}^2$ の正則性より，$\mathcal{L}^2(F)>0$ を満たす E の閉部分集合 F を見出すことができて，その F の特性関数 f を考えよう．すると，F の補集合は開集合であるから，F の各点に対し，その「例外直線」に沿って十分に薄い長方形を考えれば，r が 0 に近づくとき，(7.7) の下限も 0 に近づくからである．

フーリエ因子の理論においても，ベシコヴィッチ集合から重要な驚くべき反例を導くことができる．まず，$\mathbb{R}^2$ 上の p 乗可積分関数のなす空間上の線形作用素 T をフーリエ変換を用いて次のように定める：

$$(Tf)^\wedge(d)=\chi_B(d)\hat{f}(d),$$

ただし，χ_B は単位円板に関する特性関数である．このとき，$p=2$ に対しては，

$$(7.8)\qquad \|Tf\|_p\leq c\|f\|_p$$

の成り立つことが知られており，さらに $\frac{4}{3}<p<4$ を満たすあらゆる p に対しても，このような不等式が成り立つであろうと予想されていた．ところが，Fefferman (1971) は，ベシコヴィッチ集合を巧妙に用いることによって，$p\neq 2$ ならば (7.8) が成立しないということを示したのである．これに関して興味ある読者は，Fefferman 自身の明快な論文を参照していただきたい．

また，Mitjagin & Nikisin(1973) は，同様の手法によって，単位正方形上の p 乗可積分($p<2$) 関数 f で，その部分フーリエ和がほとんどいたるところで非有界なもの，つまり，f の2次元フーリエ係数を $\{a_{kj}\}$ とするとき，ほとんどすべての $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ に対して，

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\left|\sum_{k^2+j^2<r} a_{kj}\exp(2\pi \mathrm{i}(xk+yj))\right|=\infty$$

となるものを構成した．これは1次元の場合には見られない現象である．というのは，1次元の場合には Carleson–Hunt の定理により，$1<p<\infty$ なる何らかの p に対して f が p 乗可積分であれば，f のフーリエ級数はほとんどいたるところで各点収束することがわかるからである．

最後に，関数解析学への1つの応用を述べよう．Putnam(1974) は，ニコディム集合を用いることによって，ヒルベルト空間上の有界作用素 T が**超正規作用素**(hypernormal operator)(すなわち，$T^*T-TT^*\geq 0$ かつ，T を約すいかなる自明でない閉線形部分空間上でも T は正規でない)になるための必要十分条件は，T のスペクトルがその各点におけるあらゆる近傍内で正の測度をもつことであることを示した．このように，ニコディム集合も単なる反例としてだけではなく，積極的に利用されているのである．

調和解析学とのさらに詳しい関連については，Stein & Wainger(1978) の概説，Wainger & Weiss(1979) 編集による調和解析学に関する全米数学会報告集，および de Guzmán(1975, 1981) を参照していただきたい．このように，幾何学的測度論と調和解析学とは，今後もますます互いに影響を及ぼし合うことであろう．

第7章の練習問題

7.1　$\mathbb{R}^n$ ($n\geq 2$) 内の部分集合 E で，その内部で単位長の線分を任意の方向に向けることができるような，いくらでも $\mathcal{L}^n(E)$ の小さいものが存在することを示せ．

7.2　S を $[0,\pi)$ のボレル部分集合とし，S に属するあらゆる方向の直線を必ず含んでいるような $\mathbb{R}^2$ 内の部分集合を F とする．このとき，双対原理

を用いて，$\dim F \geq 1+\dim S$ が成り立つことを示せ．

7.3 $\mathbb{R}^2$ 内の $\mathcal{L}^2$ 測度0の部分集合で，x 軸上のすべての点を通るような(x 軸と異なる直線からなる)直線族を含むものが存在することを示せ．

7.4 E を $\mathbb{R}^2$ 内のボレル集合とし，$\dim E>1$ であるとする．このとき，E の各点に対応する(任意に固定した円に関する)極直線の和集合は，無限大の2次元ルベーグ測度をもつ集合を含むことを示せ．

7.5 平面上の可測関数 f に対し，中心が x で半径が r の円周上での f の平均を $F_r(x)$ とする．このとき，Wainger(1979)は，カントール集合 E に対し，ある定数 c が存在して，

$$\|\sup_{r\in E} F_{1+r}(x)\|_2 \leq c\|f(x)\|_2$$

が成り立つことを示した．このことを用いて，平面内のルベーグ測度0の集合で，$\mathbb{R}^2$ 内の各点を中心とし，何らかの $r\in E$ に対して $1+r$ を半径にもつような円を必ず含むようなものは存在しないことを示せ．

8

フラクタル集合のいろいろな例

8.1 はじめに

本章では，特殊な方法で構成されたり，数学の他分野や物理学において登場するような非整数次元をもつ集合のいろいろな例を述べ，これまでに述べてきた幾何学的測度論との関連を論じよう．ただし，ここで紹介する例は，フラクタル集合として非常に重要であるからというよりは，著書の好みによって選んだものであるということを予め了解していただきたい．各節において，興味あるいくつかの結果を証明し，その他の結果は証明なしに述べるにとどめた．これらの例を通して，読者がより深くフラクタル集合を研究するきっかけになれば幸いである．また，ほとんどの例は数学の分野に登場するものであり，それゆえ，主要な参考文献と最近の論文および書物を述べるにとどめた．さらに詳しくは，それらに掲載されている参考文献を参照していただきたい．

8.2 非整数次元の曲線

この節では，平面内の直交座標 (x, y) において，単位区間上で定義された関数 f のグラフ $(x, f(x))$ からなる曲線 Γ のハウスドルフ次元を研究しよう．

f が有界変動の関数であれば，すなわち，あらゆる有限分割 $0=x_0<x_1<\cdots$

$<x_m=1$ に対して $\sum_{i=1}^{m}|f(x_i)-f(x_{i-1})|$ が一様に有界であるならば，3.2節において考察したように，Γ は長さ有限の曲線であり，したがって正則な1集合である．逆に，f が連続だけれどもかなり特異な関数であれば，Γ が1より大きな次元をもつことがある．しかしながら，一般に，関数 f から Γ のハウスドルフ次元および測度を計算するのは難しいのであるが，もし f がリプシッツ条件を満たすような関数であれば，Γ のハウスドルフ測度を上から評価することは容易である．

定理 8.1

定数 c と h_0 が存在して，すべての x と $0<h\leq h_0$ に対して，

$$|f(x+h)-f(x)|\leq ch^{2-s} \tag{8.1}$$

が成り立っているとする．このとき，$\mathcal{H}^s(\Gamma)<\infty$ が成り立つ．

証明　長さが $h<h_0$ であるような x 軸上の任意の区間を I とする．このとき，(8.1) から容易にわかるように，$\{(x,f(x)):x\in I\}$ で表わされる Γ の部分弧は，高々 $\lceil h^{-1}ch^{2-s}\rceil$ 個の，区間 I 上に積み重ねられた1辺の長さ h の正方形によって覆われている．（$\lceil a\rceil$ は a より大きい最小の整数を表わす．）そこで，十分大きな m に対し，$[0,1]$ を m 等分して，長さ $h=1/m<h_0$ の各区間を考えれば，

$$\mathcal{H}^s_{2^{1/2}h}(\Gamma)\leq m(h^{-1}ch^{2-s}+1)\,(2^{\frac{1}{2}}h)^s\leq c2^{1+s/2}$$

を得る．h はいくらでも0に近づけることができるから，結局 $\mathcal{H}^s(\Gamma)\leq c2^{1+s/2}<\infty$．　□

グラフが微細な構造をもつような関数を簡単に定義するには，次第に速く振動していくような関数列の和を考えればよい．例えば，$\sum_1^\infty|a_i|<\infty$ かつ $\lambda_i\to\infty$ を満たす数列に対して，

$$f(x)=\sum_{i=1}^{\infty}a_i\sin(\lambda_i x) \tag{8.2}$$

のような三角級数を考えれば，うまく数列 a_i と λ_i を選ぶことによって，f のグラフのハウスドルフ次元が1より大きくなるようにできると期待される．おそらく，このような型の関数で最もよく知られているものは，

(8.3) $$f(x)=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda^{(s-2)i}\sin(\lambda^{i}x)$$

であろう(ただし，$1<s<2$ かつ $\lambda>1$ とする)．この関数は，連続ではあるが，いたるところで微分不可能な関数の最初の例として，Weierstrass が構成したものである．この Weierstrass の関数のグラフはハウスドルフ次元 s をもつであろうと予想されているが，いまのところ厳密に証明されてはいないようである．(ハウスドルフ次元が s 以下になることは証明できる．練習問題 8.3 を参照のこと.) Mandelbrot(1977) は，Weierstrass の関数を変形して，

$$f(x)=\sum_{i=-\infty}^{\infty}\lambda^{(s-2)i}(1-\cos\lambda^{i}x)$$

なる関数を導入した．この関数は，任意の x に対して，関数方程式 $f(\lambda x)=\lambda^{2-s}f(x)$ を満たしている．この関数のグラフのハウスドルフ次元も s であろうと予想されている．Berry & Lewis(1980) は，このような関数のグラフをコンピュータで描き，物理学へのいろいろな応用について言及した．

計算を簡単にするために，(8.2) 式における sin 関数を次のような周期関数で置き換えよう．すなわち，$\mathbb{R}$ 上の周期 4 の関数 g を，

$$g(4k+x)=\begin{cases}x & (0\leq x<1)\\ 2-x & (1\leq x<3)\\ x-4 & (3\leq x<4)\end{cases}$$

によって定める(ただし，k は整数とする)．g は，いわゆる「三角波」型の関数である．(特に，整数点以外の x において g は微係数 ±1 をもつことに注意しよう.) こうして，(8.2) の代わりに次の関数

(8.4) $$f(x)=\sum_{i=1}^{\infty}a_i\,g(\lambda_i x)$$

を考察するのである．Besicovitch & Ursell(1937) は，この型の関数のグラフのハウスドルフ次元に関して次のような結果を得た．

定理 8.2

Γ を，次の関数

(8.5) $$f(x)=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i^{s-2}g(\lambda_i x)$$

の $[0,1]$ 上のグラフとする．ただし $1<s<2$ で，$\{\lambda_i\}$ は，λ_{i+1}/λ_i が単調に無限

大に発散し，かつ $\log\lambda_{i+1}/\log\lambda_i\to 1$ を満たすような正数列とする．このとき，$\dim\Gamma=s$ が成り立つ．

証明　十分小さい正数 h に対して，

$$\lambda_{k+1}^{-1}\leq h<\lambda_k^{-1} \tag{8.6}$$

を満たす整数 k を考える．k は十分に大きいとしてよいから，

$$\begin{aligned}|f(x+h)-f(x)| &\leq \sum_1^k \lambda_i^{s-2}|g(\lambda_i(x+h))-g(\lambda_i x)|+2\sum_{k+1}^\infty \lambda_i^{s-2}\\ &\leq h\sum_1^k \lambda_i^{s-1}+2\sum_{k+1}^\infty \lambda_i^{s-2}\\ &\leq 2h\lambda_k^{s-1}+4\lambda_{k+1}^{s-2}\end{aligned}$$

が成り立つ．すると，(8.6) を用いて，

$$|f(x+h)-f(x)|\leq 2h^{2-s}+4h^{2-s}=6h^{2-s}$$

が成り立ち，定理 8.1 より，$\mathcal{H}^s(\Gamma)<\infty$ を得る．

逆に，Γ のハウスドルフ次元を下から評価しよう．これは，上からの評価に比べてかなり厄介である．まず，座標軸に関して平行な辺をもち，1 辺の長さが h であるような任意の正方形を S とする．S を x 軸上に正射影した区間を I とおく．このとき，$E=\{x\colon (x,f(x))\in S\}$ のルベーグ測度はあまり大きくならないことを以下に示そう．

$f(x)$ の部分和を

$$f_k(x)=\sum_1^k \lambda_i^{s-2}g(\lambda_i x)$$

と定義する．そこで，$\lambda_{k+1}\geq 2\lambda_k\geq 2$ を満たし，さらに

$$|f(x)-f_k(x)|=\left|\sum_{k+1}^\infty \lambda_i^{s-2}g(\lambda_i x)\right|\leq \sum_{k+1}^\infty \lambda_i^{s-2}\leq 2\lambda_{k+1}^{s-2}, \tag{8.7}$$

および，微係数の存在する点 x において，

$$|f'_k(x)|=\left|\sum_1^k \lambda_i^{s-1}g'(\lambda_i x)\right|\geq \lambda_i^{s-1}-\sum_1^{k-1}\lambda_i^{s-1}\geq \frac{1}{2}\lambda_k^{s-1} \tag{8.8}$$

が成り立つような十分に大きな k を考える．まず，そのような k に対して，1 辺の長さが $h=\lambda_k^{-1}$ の任意の正方形 S を考えよう．このとき，

$$\lambda_{k+m}^{s-2}\leq h=\lambda_k^{-1}<\lambda_{k+m-1}^{s-2} \tag{8.9}$$

を満たす $m\geq 1$ が存在する．一方で，λ_{i+1}/λ_i は単調増大列であるから，

$$\left(\frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k}\right)^{(m-1)(2-s)}\lambda_k^{2-s}<\left(\frac{\lambda_{k+m-1}}{\lambda_{k+m-2}}\cdots\frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k}\lambda_k\right)^{2-s}=\lambda_{k+m-1}^{2-s}<\lambda_k,$$

したがって，

$$\left(\frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k}\right)^{(m-1)(2-s)}<\lambda_k^{s-1}=\left(\frac{\lambda_k}{\lambda_{k-1}}\cdots\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\lambda_1\right)^{s-1}<\left(\frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k}\right)^{(k-1)(s-1)}\lambda_1^{s-1}$$

が成り立つ．両辺の対数をとれば，結局，k に依存しない正定数 a が存在して，

(8.10) $$m<ak$$

の成り立つことがわかる．

最初に，$m=1$ の場合を考える．S の上下をそれぞれ長さ $2\lambda_{k+1}^{s-2}$ $(\leq 2h)$ ほど引き延ばした長方形を S_1 とすれば，(8.7) より，もし $(x,f(x))$ が S に属せば，必ず $(x,f_k(x))$ は S_1 に属することがわかる．ところで，$f'_k(x)$ の符号は $g'(\lambda_k x)$ の符号と一致することから，$f'_k(x)$ は I 上で高々一度しか符号を変えないことがわかる．このとき，$|f'_k(x)|\geq\frac{1}{2}\lambda_k^{s-1}$ であるから，$f'_k(x)$ が定符号である区間において，$(x,f_k(x))$ が S_1 に属するような x の区間の長さは，高々 $2\lambda_k^{1-s}\times(S_1$ の高さ) である．したがって，

(8.11) $$\mathcal{L}^1(E)\leq 2\cdot 2\lambda_k^{1-s}\cdot 5h=20h^s$$

が成り立つ．

次に $m>1$ の場合も，上で述べたように，I を高々 2 つの区間に分割して，それぞれの区間上で $f'_k(x)$ が定符号であるようにできる．この場合の S_1 の高さは，(8.9) より，$h+4\lambda_{k+1}^{s-2}\leq 5\lambda_{k+1}^{s-2}$ である．したがって，E の点を考える限り，それぞれの区間内で高々 $2\lambda_k^{1-s}\cdot 5\lambda_{k+1}^{s-2}$ の長さの小区間を考えれば十分である．さて，それぞれの小区間を，その上で $f'_{k+1}(x)$ の符号が一定になるように，さらに分割しよう．すると明らかに，そのような小区間の個数は $2\lambda_k^{1-s}\cdot 5\lambda_{k+1}^{s-2}\cdot\frac{1}{2}\lambda_{k+1}+1\leq 6(\lambda_{k+1}/\lambda_k)^{s-1}$ によって評価される．

さらに，$m>2$ の場合は，上述の操作を繰り返して，それぞれの小区間を，さらに $6(\lambda_{k+2}/\lambda_{k+1})^{s-1}$ 以下の個数の小区間に分割して，その小区間の上で $f'_{k+2}(x)$ の符号が一定になるようにできる．以下同様にして，結局，E を，

$$2\cdot 6^{m-1}\left(\frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k}\cdot\frac{\lambda_{k+2}}{\lambda_{k+1}}\cdots\frac{\lambda_{k+m-1}}{\lambda_{k+m-2}}\right)^{s-1}=2\cdot 6^{m-1}\left(\frac{\lambda_{k+m-1}}{\lambda_k}\right)^{s-1}$$

以下の個数の小区間で覆うことができて，その各小区間上で $f'_{k+m-1}(x)$ の符号が一定になるようにできる．そこで今度は S の上下をそれぞれ長さ $2\lambda_{k+m}^{s-2}$ ほど

引き延ばした長方形を S_2 とすれば，(8.7) より，もし $(x, f(x)) \in S$ であれば，必ず $(x, f_{k+m-1}(x)) \in S_2$ が成り立つことがわかる．このとき，S_2 の高さは $h+4\lambda_{k+m}^{s-2} \leq 5h$ であるから，各小区間において f_{k+m-1} の傾きを考え，(8.9) と (8.10) を用いて，

$$\mathcal{L}^1(E) \leq 2 \cdot 6^{m-1} \left(\frac{\lambda_{k+m-1}}{\lambda_k} \right)^{s-1} \cdot 5h \cdot 2\lambda_{k+m-1}^{1-s}$$
$$\leq 20 \cdot 6^{m-1} h^s \leq 20 \cdot 6^{ak} h^s$$

を得る．こうして，$h=\lambda_k^{-1}$ のときには，k に依存しない正定数 b と c が存在して，$\mathcal{L}^1(E) \leq cb^k h^s$ の成り立つことがわかった．

次に，十分に小さい任意の h に対して，1辺の長さが h の正方形 S を考える．このとき，$\lambda_{k+1}^{-1} < h \leq \lambda_k^{-1}$ を満たす k が存在する(k は十分に大きいとしてよい)．すると，任意の $t<s$ に対し，

$$\mathcal{L}^1(E) \leq cb^k \lambda_k^{-s} = c\lambda_{k+1}^{-t} \frac{\lambda_{k+1}^t}{\lambda_k^{(s+t)/2}} \frac{b^k}{\lambda_k^{(s-t)/2}}$$

であるが，λ_k に関する条件から，k が増加していくとき，$\lambda_k^{(s+t)/2}$ は λ_{k+1}^t より速く増加し，また $\lambda_k^{(s-t)/2}$ は b^k より速く増加することがわかる．したがって，h に依存しない正定数 c_1 が存在して，

$$\mathcal{L}^1(E) \leq c_1 h^t \tag{8.12}$$

が成り立つ．

さて，Γ の十分に小さい任意の被覆 $\{U_i\}$ に対し，各 U_i を1辺の長さが $|U_i|$ であるような正方形 S_i で覆う．$E_i=\{x\colon (x, f(x)) \in S_i\}$ とおけば，明らかに $[0,1] \subset \bigcup_i E_i$ である．このとき，(8.12) より，

$$\sum |U_i|^t = \sum 2^{-\frac{1}{2}t} |S_i|^t \geq c_1^{-1} \sum \mathcal{L}^1(E_i) \geq c_1^{-1}$$

が成り立ち，ゆえに，任意の $t<s$ に対して $\mathcal{H}^t(\Gamma) \geq c_1^{-1} > 0$ が成り立つ．したがって，$\dim \Gamma = s$ を得る．□

この定理と同じ λ_i に関する条件のもとに，次の関数

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^{s-2} g(\lambda_i x + \theta_i)$$

のグラフのハウスドルフ次元が s になることを同様の方法で示すことができる．ただし，各「位相」θ_i は固定されているとする．

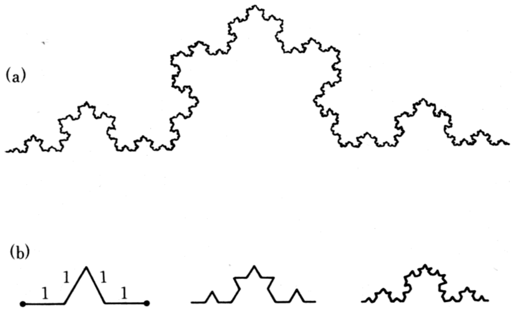
Besicovitch & Ursell (1937) は，$1<t<s$ に対して $\mu=(s-1)(2-t)/(2-s)\times(t-1)$ とおくとき，(8.5) 式において，もし，$\lambda_{i+1}=\lambda_i^\mu$ がすべての i で成り立つならば，$\dim\Gamma=t$ であることを同様の方法で示した．その他の結果については Love & Young (1937) および Kline (1945) を参照のこと．

曲線の「次元」に関しては，他にもいろいろの定義が提案され，ハウスドルフ次元との関係が論じられている．例えば，区間の分割を次第に細かくしていったときの $\sum_{i=1}^{m}|f(x_i)-f(x_{i-1})|^s$ の上限および下限が考えられる(これについては Ville (1936) を参照)．あるいは，区間 $[x, x+h]$ に対応する Γ の部分弧を $\Gamma(x, x+h)$ と書くとき，$h\to0$ のときの $\mathcal{H}^s(\Gamma(x, x+h))/h^s$ の極限も興味ある性質をもっている(これについては Besicovitch (1964*b*, 1965*a*, 1967) を参照のこと)．

8.3　自己相似集合

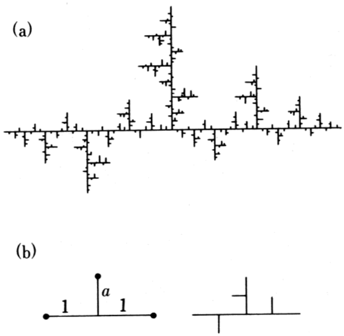
古典的なフラクタル集合の多くは，いわゆる「自己相似」な集合，すなわち全体の形を相似縮小したいくつかの部分から成り立っているような集合である．その最も簡単な例は，1.4 節で定義したカントール集合 E である．この場合，$E\cap\left[0, \frac{1}{3}\right]$ と $E\cap\left[\frac{2}{3}, 1\right]$ は，ともに全体の集合 E を $\frac{1}{3}$ に相似縮小したものになっている．さらに，$E\cap\left[0, \frac{1}{9}\right]$，$E\cap\left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right]$，$E\cap\left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right]$ および $E\cap\left[\frac{8}{9}, 1\right]$ は，ともに全体の集合 E を $\frac{1}{9}$ に相似縮小したものにもなっているし，以下同様である．次に，平面内の自己相似集合の 2 つの例を図 8.1 と図 8.2 に示そう．図 8.1 に描かれた集合 (a) は，よく知られた**コッホ曲線** (Koch curve) (あるいは雪片曲線とも呼ばれる) である．((b) については本節の終わりを参照.)　Mandelbrot (1977, 1982) の本，および Dekking (1982) の論文には，その他の多くの美しい自己相似図形がコンピュータ・グラフィックスを用いて描かれている．また，Stepney (1984) は，そのような図形を描くためのコンピュータ・プログラムを紹介している．

自己相似集合の例は今世紀の初めからよく知られていたのであるが，それらを組織的に取り扱うようになったのは最近になってからである．Dekking



コッホ曲線(ハウスドルフ次元は log 4/log 3 である.)

図 8.1



この集合のハウスドルフ次元 s は，方程式 $2\left(\frac{1}{2}\right)^s+\left(\frac{1}{2}a\right)^s=1$ $(a<1)$ の解として得られる.

図 8.2

(1982) は，単語から生成された自由群上の自己準同型を用いて，自己相似集合を一般的に記述している．しかしながら，この節では，Hutchinson (1981) による見事な取り扱いを述べることにしよう．(Moran (1946) および Marion (1979) も参照のこと.)

写像 ψ: $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ が**縮小写像** (contraction) であるとは，ある定数 $c<1$ が存

在して，$|\phi(x)-\phi(y)|\leq c|x-y|$ がすべての $x,y\in\mathbb{R}^n$ に対して成り立つときにいう．明らかに，縮小写像は連続である．このとき，任意の x,y に対して上式が成立するような最小の定数 c のことを ϕ の**縮小率**という．$\mathbb{R}^n$ 内の任意の部分集合を，それと幾何学的に相似な集合に写すような縮小写像のことを**相似縮小**(similitude)という．相似縮小は，伸縮，回転，平行移動および対称変換の合成で表わすことができる．この場合の縮小率は，単に相似比率に他ならない．

$E\subset\mathbb{R}^n$ が，与えられた縮小写像 $\phi_1,\cdots,\phi_m$ に対して**不変**(invariant)であるとは，$E=\bigcup_1^m\phi_j(E)$ が成り立つときにいう．このとき，さらに各 ϕ_j が相似縮小であり，$\mathcal{H}^s(E)>0$ かつ $\mathcal{H}^s(\phi_i(E)\cap\phi_j(E))=0$ が任意の $i\neq j$ で成り立つような s が存在するとき，E は**自己相似**(self-similar)であるという．(最後の測度に関する条件は，E の自己相似性が重なり合いによって失われないことを要求している．)　さて，与えられた任意の縮小写像の組に対し，空でないコンパクト不変集合 E が一意的に存在し，さらに，「開集合条件」と呼ばれる条件を満たす相似縮小に対しては E が自己相似な s 集合となり，その s の値はそれらの縮小率から計算することができるということを以下に示そう．例えば，次の2つの $\mathbb{R}$ 上の相似縮小

$$\phi_1(x)=x/3, \qquad \phi_2(x)=(2+x)/3$$

に対する一意的なコンパクト不変集合は，カントール集合である．

与えられた縮小写像の組 $\{\phi_j\}_1^m$ に対して，$\mathbb{R}^n$ 内の部分集合に対する変換 ϕ を

$$\phi(F)=\bigcup_1^m\phi_j(F)$$

によって定義する．また，$\phi^0(F)=F$ および $\phi^{k+1}(F)=\phi(\phi^k(F))$ $(k\geq 0)$ によって ϕ の反復を定める．

$\mathbb{R}^n$ 内のコンパクトな部分集合上で定義された縮小写像の組に対しても，同様の考察が可能であることに注意しておく．

定理 8.3

与えられた $\mathbb{R}^n$ 上の縮小写像の組 $\{\phi_j\}_1^m$ に対し，

$$E=\phi(E)=\bigcup_1^m\phi_j(E) \tag{8.13}$$

を満たす空でないコンパクト集合 E が一意的に存在する．さらに，$\mathbb{R}^n$ 内の任意の空でないコンパクト集合 F に対し，$\psi^k(F)$ は，$k\to\infty$ のとき，ハウスドルフの距離の意味で E に収束する．

証明　$\mathbb{R}^n$ 内の空でないすべてのコンパクト集合からなる集合族を $\mathcal{C}$ とする．このとき，Blaschke の選出定理 3.16 により，$\mathcal{C}$ はハウスドルフの距離 δ に関して完備な距離空間になることがわかる．さて，各 ψ_j の縮小率を $r_j<1$ としよう．すると，任意の $F_1, F_2\in\mathcal{C}$ に対し，ハウスドルフの距離 δ の定義から，

$$\begin{aligned}\delta(\psi(F_1),\psi(F_2))&=\delta\left(\bigcup_1^m \psi_j(F_1),\ \bigcup_1^m \psi_j(F_2)\right)\\&\le\max_j \delta(\psi_j(F_1),\psi_j(F_2))\\&\le(\max_j r_j)\delta(F_1,F_2)\end{aligned}$$

の成り立つことがわかる．（各 ψ_j は縮小写像であるから，もし F_1 が F_2 の δ 平行体に含まれていれば，$\psi_j(F_1)$ は $\psi_j(F_2)$ の $r_j\delta$ 平行体に含まれているのである．）このとき，$\max_j r_j<1$ であるから，ψ は $\mathcal{C}$ 上の縮小写像である．したがって，完備距離空間における縮小写像の原理から，$\psi(E)=E$ を満たす $E\in\mathcal{C}$ が一意的に存在し，さらに，任意の $F\in\mathcal{C}$ に対して，$k\to\infty$ のとき $\delta(\psi^k(F),E)\to 0$ が成り立つのである．□

不変集合 E は，$1\le j_i\le m$ を満たすようなあらゆる有限列 $\{j_1,j_2,\cdots,j_k\}$ を考えたときの写像 $\psi_{j_1}\circ\psi_{j_2}\circ\cdots\circ\psi_{j_k}$ の一意的な不動点の全体の閉包と一致することがわかる．（ここで，$(\psi_1\circ\psi_2)(x)$ は $\psi_1(\psi_2(x))$ の意味である．）

さて，次の方程式

$$\sum_1^m r_j^s=1$$

を満たす実数 s を考える．このとき，任意の k に対して，

$$\sum_{j_1\cdots j_k}(r_{j_1}r_{j_2}\cdots r_{j_k})^s=1 \tag{8.14}$$

の成り立つことがわかる．ただし，左辺の和は，$1\le j_i\le m$ を満たすようなすべての k 個の整数の組 $\{j_1\cdots j_k\}$ にわたるものとする．また，このような任意の整数の組と，任意の集合 F に対し，

$$F_{j_1\cdots j_k}=\psi_{j_1}\circ\cdots\circ\psi_{j_k}(F)$$

と略記しよう．

次に前定理 8.3 の測度版ともいうべき次の補題を示そう．実際 Hutchinson (1981) は，縮小写像の原理を用いた証明を与えている．

補題 8.4

E 内に台をもち，$\mu(\mathbb{R}^n)=1$ を満たし，かつ，任意の可測集合 F に対して，

$$\mu(F)=\sum_{j=1}^{m} r_j^s\mu(\psi_j^{-1}(F)) \tag{8.15}$$

を満たすようなボレル測度 μ が存在する．

証明 任意に点 $x\in E$ を固定し，$x_{j_1\cdots j_k}=\psi_{j_1}\circ\cdots\circ\psi_{j_k}(x)$ と略記しよう．各 $k=1,2,\cdots$ に対し，E 上の連続関数全体のなす空間 $\mathcal{F}$ 上の正の線形汎関数を

$$\phi_k(f)=\sum_{j_1\cdots j_k}(r_{j_1}\cdots r_{j_k})^s f(x_{j_1\cdots j_k}) \tag{8.16}$$

によって定義する．さて，任意の $f\in\mathcal{F}$ に対し，f は E 上で一様連続であるから，任意の $\varepsilon>0$ に対して，十分大きな整数 p が存在して，すべての $k\geq p$ に対して $E_{j_1\cdots j_k}$ 上での f の変動が ε 以下であるようにできる．（$|E_{j_1\cdots j_k}|\leq(\max_j r_j)^k|E|$ であることに注意．） ところで，任意の $k\geq p$ に対して $x_{j_1\cdots j_k}\in E_{j_1\cdots j_p}$ であるから，(8.14) と (8.16) から，$|\phi_k(f)-\phi_{k'}(f)|\leq\varepsilon$ があらゆる $k,k'\geq p$ に対して成立することがわかる．こうして，f を固定するごとに，数列 $\{\phi_k(f)\}_k$ は収束し，明らかに，その極限は $\mathcal{F}$ 上の正の線形汎関数を定めている．したがって，Riesz の表現定理 6.2 より，あらゆる $f\in\mathcal{F}$ に対して

$$\int f\,\mathrm{d}\mu=\lim_{k\to\infty}\phi_k(f) \tag{8.17}$$

が成り立つようなボレル測度 μ が存在する．特に，$f\equiv 1$ とおくことによって，(8.16) から，$\mu(\mathbb{R}^n)=1$ を得る．また，任意の $f\in\mathcal{F}$ に対して，

$$\begin{aligned}\phi_k(f)&=\sum_{j_1} r_{j_1}^s\sum_{j_2\cdots j_k}(r_{j_2}\cdots r_{j_k})^s f(x_{j_1\cdots j_k})\\&=\sum r_{j_1}^s\sum_{j_2\cdots j_k}(r_{j_2}\cdots r_{j_k})^s f(\psi_{j_1}(x_{j_2\cdots j_k}))\\&=\sum_j r_j^s\phi_{k-1}(f\circ\psi_j)\end{aligned}$$

が成り立つから，$k\to\infty$ とすることによって，(8.17) から，

$$\int f\,\mathrm{d}\mu=\sum_j r_j^s\int f\circ\psi_j\,\mathrm{d}\mu$$

を得る．上式は，近似して考えることによって，任意の非負可測関数fに対しても成り立つことがわかる．したがって，特に(8.15)が成立する．

最後に，E上で0になる任意の連続関数fに対し，(8.16)から，$\phi_k(f)=0$がすべての$\boldsymbol{k}$で成立する．したがって，(8.17)から$\int f\,\mathrm{d}\mu=0$となり，μはE内に台をもっていることがわかる．□

さて，任意の部分集合Fに対して，

$$\mu_{j_1\cdots j_k}(F)=\mu((\psi_{j_1}\circ\cdots\circ\psi_{j_k})^{-1}(F))=\mu(\psi_{j_k}^{-1}\circ\cdots\circ\psi_{j_1}^{-1}(F))$$

と略記しよう．すると，$\mu_{j_1\cdots j_k}$の台は$E_{j_1\cdots j_k}$に含まれていることがわかる．さらに，(8.15)より，

$$\mu_{j_1\cdots j_k}=\sum_j r_j^s\,\mu_{j_1\cdots j_k j} \tag{8.18}$$

が成り立つ．

与えられた縮小写像の組$\{\psi_j\}_1^m$が**開集合条件**(open set condition)を満たすとは，

$$\psi(V)=\bigcup_{j=1}^m\psi_j(V)\subset V \tag{8.19}$$

を満たす有界な開集合Vで，各$\psi_j(V)$が互いに交わらないようなものが存在するときにいう．このとき，写像$\psi_{j_1}\circ\cdots\circ\psi_{j_k}$を作用させることによって，

$$\bigcup_{j=1}^m V_{j_1\cdots j_k j}\subset V_{j_1\cdots j_k}$$

を得る．(左辺は，やはり互いに交わらない有限和である．)こうして，あらゆる$\boldsymbol{k}$を動かしたときの集合族$\{V_{j_1\cdots j_k}\}$は網としての性質をもつのである．つまり，この族に属する任意の2つの集合は，互いに交わらないか，さもなければ，一方が他方に含まれているかのいずれかが成り立っている．

もし，開集合条件(8.19)が成り立っていれば，不変集合$E\subset\bar{V}$となる($\bar{V}$はVの閉包)．実際，定理8.3より，集合列$\{\psi^k(\bar{V})\}_k$は，ハウスドルフの距離の意味でEに収束する単調減少列であるから，

$$E=\bigcap_{k=0}^\infty\psi^k(\bar{V}) \tag{8.20}$$

を得るのである．このとき，写像$\psi_{j_1}\circ\cdots\circ\psi_{j_k}$を作用させることによって，

$E_{j_1\cdots j_k}\subset\bar{V}_{j_1\cdots j_k}$ を得る．（ここで，ϕ_j の連続性から $\phi_j(\bar{V})\subset\overline{\phi_j(V)}$ が成り立つ．）

次に，$\{\phi_j\}$ が相似縮小の場合を考察しよう．次の方程式

$$\sum_1^m r_j^s=1$$

を満たす一意的な正数 s のことを**相似次元**(similarity dimension)という．このとき，開集合条件を満たすような相似縮小の組に対しては，その不変集合 E は自己相似であり，かつ，そのハウスドルフ次元と相似次元とは一致することを以下に示そう．相似次元の方は，安易に計算して求めることができるので便利なのである．開集合条件は各集合 $\phi_j(E)$ が互いにあまり重なり合わないことを要求しているわけである．

補題 8.5

$\{V_i\}$ は $\mathbb{R}^n$ 内の互いに交わらない開集合の列で，各 V_i は半径 $c_1\rho$ の閉球を含み，かつ半径 $c_2\rho$ の閉球に含まれているとする．このとき，半径が ρ の任意の閉球 B は，$(1+2c_2)^n c_1^{-n}$ を越える個数の $\bar{V}_i$ たちと交わることはできない．

証明 B と交わる任意の $\bar{V}_i$ に対し，$\bar{V}_i$ は B と同じ中心をもつ半径 $(1+2c_2)\rho$ の閉球に含まれている．こうして，$\{\bar{V}_i\}$ のうちの q 個が B と交わっているならば，球の体積を考えることによって，$q(c_1\rho)^n\leq(1+2c_2)^n\rho^n$ を得る．これより，補題で述べた個数 q に関する評価を得ることができる． □

定理 8.6

相似縮小の組 $\{\phi_j\}_1^m$ は開集合条件を満たしているとする．このとき，対応する不変集合 E は s 集合(すなわち $0<\mathcal{H}^s(E)<\infty$)である．ここで，$s$ は

$$\sum_1^m r_j^s=1 \tag{8.21}$$

を満たす実数であり，各 r_j $(1\leq j\leq m)$ は ϕ_j の縮小率である．

証明 (8.13) 式を反復することによって，$E=\bigcup_{j_1\cdots j_k}E_{j_1\cdots j_k}$ を得る．一方で，(8.14) を用いて，

$$\sum_{j_1\cdots j_k}|E_{j_1\cdots j_k}|^s=\sum_{j_1\cdots j_k}|E|^s(r_{j_1}\cdots r_{j_k})^s=|E|^s.$$

ところで，$k\to\infty$ のとき $|E_{j_1\cdots j_k}|\leq(\max_j r_j)^k|E|\to0$ であるから，ただちに

$\mathcal{H}^s(E) \le |E|^s < \infty$ を得る．

次に，下からの評価をすでに述べた2つの補題を用いて示そう．まず，開集合条件 (8.19) における開集合 V は，半径 c_1 の閉球を含み，半径 c_2 の閉球に含まれているとする．$\rho > 0$ を十分に小さく任意に固定する．さて，$1 \le j_i \le m$ を満たす任意の無限列 $\{j_1, j_2, \cdots\}$ に対して，$r_{j_1} \cdots r_{j_k} \le \rho$ を満たす最初の $k \ge 1$ を考えると，明らかに

$$(8.22) \qquad (\min_j r_j)\rho < r_{j_1} \cdots r_{j_k} \le \rho$$

が成り立っている．このようにして，各無限列から有限列を作り，そのような有限列の全体を $\mathcal{T}$ と書く．ところで，開集合族 $\{V_{j_1 \cdots j_k}\}$ の網としての性質により，$\{V_{j_1 \cdots j_k} : j_1 \cdots j_k \in \mathcal{T}\}$ は互いに交わらないことがわかる．また，そのような開集合 $V_{j_1 \cdots j_k}$ は半径 $c_1 r_{j_1} \cdots r_{j_k}$ の閉球を含んでいることから，(8.22) より，半径 $c_1(\min_j r_j)\rho$ の閉球を含んでいる．同様にして $V_{j_1 \cdots j_k}$ は半径 $c_2 r_{j_1} \cdots r_{j_k}$ の閉球に含まれるから，ゆえに，半径 $c_2\rho$ の閉球に含まれている．そこで，補題 8.5 を用いると，半径が ρ の任意の閉球 B は，$q = (1+2c_2)^n c_1^{-n} (\min_j r_j)^{-n}$ を越える個数の $\{\bar{V}_{j_1 \cdots j_k} : j_1 \cdots j_k \in \mathcal{T}\}$ の元と交わることはできないことがわかる．

さて，補題 8.4 で考察したボレル測度 μ を考えよう．このとき，(8.18) を適当に反復することによって，

$$\mu = \sum_{j_1 \cdots j_k \in \mathcal{T}} (r_{j_1} \cdots r_{j_k})^s \mu_{j_1 \cdots j_k}$$

を得る．すると，各 $\{j_1, \cdots, j_k\}$ に対し，$\mu_{j_1 \cdots j_k}(\mathbb{R}^n) = 1$ および $\mathrm{supp}(\mu_{j_1 \cdots j_k}) \subset E_{j_1 \cdots j_k} \subset \bar{V}_{j_1 \cdots j_k}$ であるから，$\mu(B) \le \sum (r_{j_1} \cdots r_{j_k})^s \mu_{j_1 \cdots j_k}(\mathbb{R}^n) \le \sum (r_{j_1} \ldots r_{j_k})^s$ を得る．ただし，右辺の和は $\bar{V}_{j_1 \cdots j_k}$ が B と交わるようなすべての $\{j_1, \cdots, j_k\} \in \mathcal{T}$ にわたるものとする．こうして，(8.22) より，十分に小さいあらゆる閉球 B に対して，$\mu(B) \le q\rho^s = q2^{-s}|B|^s$ を得る．ところで，十分に小さい任意の E の被覆 $\{U_i\}$ に対し，$|B_i| \le 2|U_i|$ を満たすような閉球列 $\{B_i\}$ で E を覆うことができるから，

$$1 = \mu(E) \le \sum \mu(B_i) \le q2^{-s} \sum |B_i|^s \le q \sum |U_i|^s$$

が成り立つ．ここで，$\sum |U_i|^s$ が $\mathcal{H}^s(E)$ にいくらでも近くなるように $\{U_i\}$ を選ぶことができることから，結局，$\mathcal{H}^s(E) \ge q^{-1} > 0$ を得るのである．□

系 8.7

さらに，E は自己相似集合である．すなわち，各 $i\neq j$ に対して $\mathcal{H}^s(\psi_i(E)\cap\psi_j(E))=0$ が成り立つ．

証明 各 ψ_j は相似縮小であるから，明らかに

$$\sum_{j=1}^{m}\mathcal{H}^s(\psi_j(E))=\sum_{j=1}^{m}r_j^s\mathcal{H}^s(E)=\mathcal{H}^s(E)$$

が成り立つ．ところで，$0<\mathcal{H}^s(E)<\infty$ であるから，(8.13) と $\mathcal{H}^s$ の加法性により，上式から容易に $\mathcal{H}^s(\psi_i(E)\cap\psi_j(E))=0$ $(i\neq j)$ を導くことができる． □

ψ_j が一般の縮小写像の場合にも，上述と同様の方法を用いて，E のハウスドルフ次元を評価することができる．例えば，次の定理が成り立つ(練習問題8.5も参照のこと)．

定理 8.8

$\{\psi_j\}_1^m$ は $\mathbb{R}$ 上の縮小写像の組で，開区間 V に対し開集合条件 (8.19) を満たしているとする．さらに，各 j について，

$$q_j|x-y|\leq|\psi_j(x)-\psi_j(y)|\leq r_j|x-y| \tag{8.23}$$

が任意の $x,y\in\bar{V}$ に対して成り立っているとする．このとき，$s\leq\dim E\leq t$ が成り立つ．ただし，s と t は方程式 $\sum_1^m q_j^s=1=\sum_1^m r_j^t$ によって定まる実数である．

証明 上からの評価は定理8.6と同様の方法によって簡単に導くことができる．下からの評価についてもほぼ同様であるが，補題8.5の代わりに次の事実を用いる．すなわち，少なくとも $2c_1\rho$ の長さをもつような互いに交わらない区間列 $\{V_i\}$ に対し，長さ 2ρ の任意の区間 B は $c_1^{-1}+2$ を越える個数の $\bar{V}_i$ たちと交わることはできない． □

ψ_j が単に縮小写像である場合には，1より大きな整数 k に対し $\{\psi_{j_1}\circ\cdots\circ\psi_{j_k}\}$ のような組を考えると，(8.23) における評価が向上し，結果的に $\dim E$ に対するよい評価を得ることができることがある．

また，不変集合のハウスドルフ次元の評価には，1.5節で述べたような方法

も有効に用いられる．

相似縮小の組を特定するには，Mandelbrot(1982)が導入した自己相似集合に対する**生成集合**(generator)の概念を用いると便利である．生成集合は，いくつかの線分と特定された2点から成り立っており，各線分に対し，特定した2点をその線分の両端点に写すような相似縮小を考えるのである．このようにして，各線分を全体の縮小像で置き換えることを繰り返すことによって，自己相似集合に対する近似集合列を構成することができる．つまり，生成集合をGとおけば，そのような近似集合列は$\psi^k(G)$によって与えられるのである．特に，$\mathbb{R}^2$においては，対称変換を除いて，この方法で相似縮小を特定することができる．さらに，最初の反復を指定しておけば，置き換えの方向までも指定することができる．定理8.6を用いれば，生成集合からそれによって生成される自己相似集合のハウスドルフ次元を求めることができる．例として，図8.1(a)と8.2(a)に示した自己相似集合に対する生成集合およびその初めの反復を，それぞれ図8.1(b)と8.2(b)に示しておいた．

生成集合を用いた自己相似集合の構成に確率を導入して考えることもできる．すなわち，反復の各段階において，ψ_jをある確率分布に従って無作為に選ぶのである．このようにして得られる集合は，それ自身が自己相似集合にはならないかもしれないが，全体と部分とが同じ確率分布をもつという意味において**統計的自己相似**(statistically self-similar)である．ある適当な条件のもとでは，そのような集合のハウスドルフ次元は，確率1で，ある特別な値になり，その値はψ_jの縮小率の期待値を用いて表わすことができる．

8.4　最大接触円による詰め込み

Vを$\mathbb{R}^n$内の有界開集合とする．Vの**最大接触円による詰め込み**(osculatory packing)とは，各jに対しB_jが$\overline{V\setminus\bigcup_1^{k-1}B_i}$に含まれる最大の閉球であるような閉球列$\{B_i\}_1^\infty$のことである．その中で最も興味深い問題は，**アポロニウスの詰め込み**(Apollonian packing)と呼ばれるもので，Vが$\mathbb{R}^2$内の曲線三角形の場合である(図8.3には，初めのいくつかの最大接触円が描かれている)．

さて，本節で考察するのは，閉集合$E=\overline{V\setminus\bigcup_1^\infty B_i}$(これを詰め込みに対する

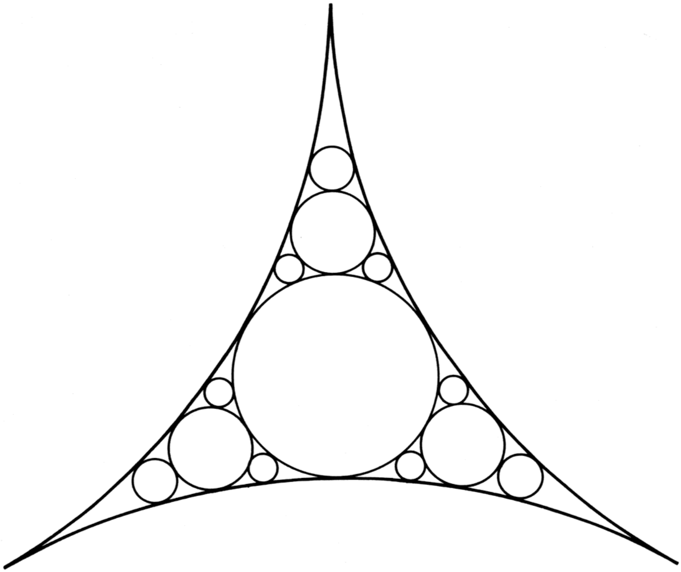


図 8.3

剰余集合(residual set)という)のハウスドルフ次元である．アポロニウスの詰め込みの場合は明らかに $1\leq \dim E\leq 2$ であるが，この真の不等式が成り立つことを示すことさえ容易ではなく，まして $\dim E$ に対するよい評価を得ることはかなり難しいのである．最初に自明でない評価を得たのは Hirst(1967) である．ここでは，Boyd(1973*b*) によって少し改良された Hirst の方法を述べることにしよう．ただし，直接的な代数計算の部分は省略する．

まず初めに，曲線三角形の内接円および外接円半径に関する公式を述べる．これは，初等三角法によって容易に示すことができる．内接円半径に関する公式は，物理学者 Soddy(1936) によるもので，**Soddy の公式**として知られている．その証明は Coxeter(1961, 12 頁) を参照のこと．

補題 8.9

半径がそれぞれ a, b, c の円弧から成り立っている曲線三角形を T とする．

このとき，T の内接円半径 r と外接円半径 ρ は，

$$r^{-1}=a^{-1}+b^{-1}+c^{-1}+2(b^{-1}c^{-1}+a^{-1}c^{-1}+a^{-1}b^{-1})^{\frac{1}{2}},$$

$$\rho^2=(abc)/(a+b+c)=(b^{-1}c^{-1}+a^{-1}c^{-1}+a^{-1}b^{-1})^{-1}$$

によって与えられる．

T を半径が a,b,c の円弧から成り立っている曲線三角形とし，B をその内接円とする．T から B を除いてできる3つの曲線三角形を T_1,T_2,T_3 とし，T,T_j の外接円半径をそれぞれ ρ,ρ_j とする．このとき，次の補題が成り立つ．

補題 8.10

$s\geq\log 3/\log(1+2\cdot 3^{-\frac{1}{2}})=1.4311\cdots$ ならば，$\rho^s\geq\rho_1^s+\rho_2^s+\rho_3^s$ が成り立つ．

証明　補題8.9を T と T_1 に適用して，

$$\rho/\rho_1=1+\rho(b^{-1}+c^{-1})$$

を得る．ただし，b と c は T と T_1 の共有する円弧の半径とする．同様の等式が T_2 と T_3 に対しても成立する．したがって，

$$\rho_1^s+\rho_2^s+\rho_3^s=\rho^s[(1+(b^{-1}+c^{-1})\rho)^{-s}+(1+(a^{-1}+c^{-1})\rho)^{-s}$$
$$+(1+(a^{-1}+b^{-1})\rho)^{-s}]$$

が成り立つ．ただし，$\rho=(b^{-1}c^{-1}+a^{-1}c^{-1}+b^{-1}c^{-1})^{-\frac{1}{2}}$ である．ところで，右辺の[　]内の式は a,b,c に関する斉次式であり，任意の a,b,c に対して1以下になることを示すためには，$\rho=1$ と仮定して差し支えない．こうして，実際 $s\geq\log 3/\log(1+2\cdot 3^{-\frac{1}{2}})$ ならば，補題が成り立つことを示すことができる．詳しくは Hirst (1967) を参照のこと．　□

さて以後は，簡単のために，長さの等しい半径が1の円弧からなる曲線三角形 T を考える．T から内接円 B を除いてできる3つの曲線三角形を T_1,T_2,T_3 とおく．次に，これら3つの曲線三角形から，それぞれの内接円 B_1,B_2,B_3 を除いてできる9個の曲線三角形を $T_{j_1j_2}$ $(1\leq j_1,j_2\leq 3)$ とおき，それぞれの内接円を $B_{j_1j_2}$ とする．以下同様にして，各曲線三角形 $T_{j_1\cdots j_k}$ から，その内接円 $B_{j_1\cdots j_k}$ を取り除いてできる3つの曲線三角形を $T_{j_1\cdots j_k1}$, $T_{j_1\cdots j_k2}$, $T_{j_1\cdots j_k3}$ とするのである．（添字1,2,3は $B_{j_1\cdots j_k}$ に関する相対的な位置によって規則正しく付けるものとする．）このようにして構成された曲線三角形族は，明らかに，網

としての性質をもっていることに注意しておこう．このとき，$1 \le j_i \le 3$ を満たすあらゆる有限列 $\boldsymbol{j} = \{j_1, \cdots, j_k\}$ に対する閉円板列 $\{B_{j_1 \cdots j_k}\}$ は，T のアポロニウスの詰め込みを与えている．

定理 8.11

上述のアポロニウスの詰め込みに対する剰余集合を E とする．このとき，$\dim E \le \log 3/\log(1+2\cdot 3^{-\frac{1}{2}}) = 1.4311\cdots$ が成り立つ．

証明 任意に固定した $\delta>0$ に対し，長さ k のすべての有限列 $\boldsymbol{j}$ に対して $|T_{\boldsymbol{j}}| \le \delta$ が成り立つように十分大きな整数 k を選ぶ．すると，$E \subset \bigcup_{\boldsymbol{j}} T_{\boldsymbol{j}}$ であるから，

$$\mathcal{H}^s_\delta(E) \le \sum_{j_1 \cdots j_k} |T_{j_1 \cdots j_k}|^s \le 2^s \sum_{j_1 \cdots j_k} \rho^s_{j_1 \cdots j_k}$$

を得る．ここで，$\rho_{\boldsymbol{j}}$ は $T_{\boldsymbol{j}}$ の外接円半径であり，右辺の和は長さ k のすべての有限列にわたるものとする．このとき，$s \ge \log 3/\log(1+2\cdot 3^{-\frac{1}{2}})$ であれば，補題 8.10 を繰り返し用いて，

$$\sum_{j_1 \cdots j_k} \rho^s_{j_1 \cdots j_k} \le \sum_{j_1 \cdots j_{k-1}} \rho^s_{j_1 \cdots j_{k-1}} \le \cdots \le \sum_{j_1} \rho^s_{j_1} \le \rho^s$$

を得る．ここで $\rho = 3^{-\frac{1}{2}}$ は T の外接円半径である．したがって，$\mathcal{H}^s_\delta(E) \le (2\cdot 3^{-\frac{1}{2}})^s$ が成り立つ．$\delta>0$ は任意であったから，$\mathcal{H}^s(E) \le (2\cdot 3^{-\frac{1}{2}})^s$を得る．□

逆に，剰余集合 E のハウスドルフ次元を下から評価するために，各曲線三角形 $T_{\boldsymbol{j}}$ の内接円半径 $r_{\boldsymbol{j}}$ を評価しよう．$T_{\boldsymbol{j}}$ の各辺の曲率(すなわち半径の逆数)を $\alpha_{\boldsymbol{j}}, \beta_{\boldsymbol{j}}, \gamma_{\boldsymbol{j}}$ とする．簡単のために，

$$\sigma_{\boldsymbol{j}} = (\beta_{\boldsymbol{j}}\gamma_{\boldsymbol{j}} + \alpha_{\boldsymbol{j}}\gamma_{\boldsymbol{j}} + \alpha_{\boldsymbol{j}}\beta_{\boldsymbol{j}})^{\frac{1}{2}} \tag{8.24}$$

とおく．これらの内接円半径や曲率は，少なくとも原理的には，Soddy の公式を繰り返し適用することによって計算することができる．さて，行列 M_1, M_2, M_3 を

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

のように定義する．このとき，補題8.9より，列ベクトル $(\alpha_j,\beta_j,\gamma_j,\sigma_j)$ 間の関係式

$$(\alpha_{jp},\beta_{jp},\gamma_{jp},\sigma_{jp})=(\alpha_j,\beta_j,\gamma_j,\sigma_j)M_p$$

が各 $p=1,2,3$ に対して成立することがわかる．ここで，jp は，$\{j_1,\cdots,j_k,p\}$ の意味である．ゆえに，これを反復することによって

$$(\alpha_j,\beta_j,\gamma_j,\sigma_j)=(1,1,1,\sqrt{3})M_{j_1}M_{j_2}\cdots M_{j_k} \tag{8.25}$$

を得る．こうして，B_j の半径 r_j (T_j の内接円半径) は次のように計算される：

$$r_j^{-1}=\alpha_j+\beta_j+\gamma_j+2\sigma_j=(1,1,1,\sqrt{3})M_{j_1}M_{j_2}\cdots M_{j_k}(1,1,1,2)', \tag{8.26}$$

ただし，右辺のダッシュ「$'$」はベクトルの転置を表わしている．

以上から，詰め込み円の半径がどのように小さくなるかという漸近的な振舞いは，$k\to\infty$ のときの行列の積 $M_{j_1}M_{j_2}\cdots M_{j_k}$ の振舞いに直接に依存していることがわかる．ところで，このような行列の積というのは，M_1,M_2,M_3 から同等の確率で無作為に選び出されるものと解釈することができよう．そうすると，十分に k が大きいときのこのような行列の積の各要素の確率分布さえわかれば十分であろう．実際，無作為に選んだ行列の積に関する理論はかなり研究されている．例えば，Kingman (1973, 1976) を参照されたい．ここでは，Hirst (1967) や Boyd (1973*a*) による，より複雑ではあるが巧妙な計算を用いた方法ではなくて，上述のような確率論の考え方を用いて $\dim E$ を下から評価する方法を説明しよう．Kingman (1976) の定理2.2の証明を改良すれば，ある実数 λ が存在して，ほとんどすべての無限列 $\{j_1,j_2,\cdots\}$（ただし $1\le j_i\le 3$ であり，このような無限列の集合上には自然な積測度が導入されている）に対して，行列 $M_{j_1}M_{j_2}\cdots M_{j_k}$ のあらゆる要素の k 乗根が $k\to\infty$ のとき λ に収束することを証明することができる．このとき，行列 M_1,M_2,M_3 に対しては $1<\lambda<3$ となることが重要である．したがって，任意に固定した $\varepsilon>0$ に対して，十分に大きな m をとれば，長さ m のあらゆる有限列 $\{j_1,\cdots,j_m\}$ のうち全体の $1-\varepsilon$ は，すべての $M_{j_1}\cdots M_{j_m}$ の要素が $(\lambda+\varepsilon)^m$ より小さいという性質をもっていることがわかる．もちろん，この事実は直接に計算しても示すことができる．このような性質をもつ長さ m の有限列全体を $\mathcal{U}$ と書こう．

補題 8.12

$\mathcal{T}$ は有限列の有限集合で，曲線三角形族 $\{T_j\colon j\in\mathcal{T}\}$ が剰余集合 E を被覆

しているようなものとする．このとき，ある正定数 c が存在して，

$$\sum_{j\in\mathcal{I}} r_j^t \ge c \tag{8.27}$$

が任意の $t \le (\log 3 + m^{-1}\log(1-\varepsilon))/\log(\lambda+\varepsilon)$ に対して成り立つ．

証明 まず，$\mathcal{I}$ に属する各有限列の長さは m の倍数であると仮定してよい．というのは，各 j に対し，その長さを m で割ったときの商を q とし，j の最初の mq 個からなる有限列を j' として，T_j を $T_{j'}$ で置き換えれば，(8.27) における各項は，(8.26) から，高々 5^{mt} 倍までしか増加しないからである．さらに，曲線三角形族の網としての性質より，$\{T_j: j\in\mathcal{I}\}$ は頂点を除いて互いに交わらないとしてよい．さて，$\mathcal{I}$ に属する最長の列の1つを $j_1, j_2, \cdots, j_q$ としよう．ここで，各 j_i は長さ m の列である．すると明らかに，長さ m の任意の列 j に対して，$j_1, j_2, \cdots, j_{q-1}, j$ は $\mathcal{I}$ に属していなければならない．ところで，$j\in\mathcal{U}$ に対しては，(8.26) から，

$$\begin{aligned} r_{j_1\cdots j_{q-1}j}^{-1} &= (1,1,1,\sqrt{3})M_{j_1}\cdots M_{j_{q-1}}M_j(1,1,1,2)' \\ &\le (1,1,1,\sqrt{3})M_{j_1}\cdots M_{j_{q-1}}(1,1,1,2)'(\lambda+\varepsilon)^m \\ &\le (\lambda+\varepsilon)^m r_{j_1\cdots j_{q-1}}^{-1} \end{aligned}$$

が成り立つ．したがって，補題でいう t に対しては

$$\begin{aligned} \sum_j r_{j_1\cdots j_{q-1}j}^t &\ge \sum_{j\in\mathcal{U}} r_{j_1\cdots j_{q-1}j}^t \ge (1-\varepsilon)3^m(\lambda+\varepsilon)^{-mt} r_{j_1\cdots j_{q-1}}^t \\ &\ge r_{j_1\cdots j_{q-1}}^t \end{aligned}$$

を得る．すなわち，j が長さ m の有限列を動くときの曲線三角形族 $T_{j_1\cdots j_{q-1}j}$ を，それらを含む1つの曲線三角形 $T_{j_1\cdots j_{q-1}}$ で置き換えても (8.27) の和は増えない．したがって，以上の操作を繰り返すことによって，最終的にただ1つの曲線三角形 T に到達するが，これに対しては (8.27) は自明である．ゆえに，E を被覆する任意の曲線三角形族に対して (8.27) が成立する． □

補題 8.13

$E\subset\bigcup_i V_i$ を満たすような有限個の開円板を $\{V_i\}$ とする．このとき，有限列の有限集合 $\mathcal{I}$ が存在して，$E\subset\bigcup_{j\in\mathcal{I}} T_j$ および

$$\sum_i |V_i|^t \ge 4^{-t}\sum_{j\in\mathcal{I}} r_j^t \tag{8.28}$$

が任意の正数 t に対して成立する．

証明　明らかに各 V_i は T と交わっているとしてよいし，また，どの円板も他の円板を含んでいないとしてよい．まず，任意に V_i を固定し，長さ $\boldsymbol{k}$ の有限列 $\boldsymbol{j}$ を動かしたときに，V_i と交わる $T_{\boldsymbol{j}}$ はただ1つであるような最大の整数 $\boldsymbol{k}$ を定める．2つの場合に分けて考えよう．

（a）　V_i が3つの曲線三角形 $T_{\boldsymbol{j}1}, T_{\boldsymbol{j}2}, T_{\boldsymbol{j}3}$ のすべてと交わる場合．このとき，V_i はこれらの曲線三角形の境界を構成している4つの円のうちで少なくとも3つと交わらなければならない．したがって，V_i の半径はそのような3つの円に対応する曲線三角形の内接円半径以上である．ゆえに，

$$\frac{1}{2}|V_i| \geq \min\{r_{\boldsymbol{j}1}, r_{\boldsymbol{j}2}, r_{\boldsymbol{j}3}, r_{\boldsymbol{j}}\} \geq \frac{1}{8}r_{\boldsymbol{j}} \tag{8.29}$$

を得る．ここで，$T_{\boldsymbol{j}}$ の各辺の半径は $r_{\boldsymbol{j}}$ より大きいことと補題8.9を用いている．このような $\boldsymbol{j}$ は $\mathcal{T}$ の要素に入れる．

（b）　V_i が曲線三角形 $T_{\boldsymbol{j}1}, T_{\boldsymbol{j}2}, T_{\boldsymbol{j}3}$ のうち2つとだけ交わる場合．一般性を失うことなく，$T_{\boldsymbol{j}1}$ と $T_{\boldsymbol{j}2}$ に交わるとしよう．$T_{\boldsymbol{j}1}$ と $T_{\boldsymbol{j}2}$ の共通点を w とする．$w \notin V_i$ ならば，（a）と同様に

$$\frac{1}{2}|V_i| \geq r_{\boldsymbol{j}3} \geq \frac{1}{8}r_{\boldsymbol{j}} \tag{8.30}$$

を得る．このような $\boldsymbol{j}$ は $\mathcal{T}$ の要素に入れる．次に，もし $w \in V_i$ ならば，$B^0 = B_{\boldsymbol{j}1}, B^1 = B_{\boldsymbol{j}12}, B^2 = B_{\boldsymbol{j}122}, B^3 = B_{\boldsymbol{j}1222}, \cdots$ と定めておき，B^m が V_i と交わるような最小の整数 m を考える．すると $B^{m+1} \subset V_i$ であり，補題8.9を用いて，

$$|V_i| \geq |B^{m+1}| \geq \frac{1}{8}|B^m| \tag{8.31}$$

を得る．このとき，B^m に対応する有限列を $\boldsymbol{j}' = \boldsymbol{j}1222\cdots2$ として，$\mathcal{T}$ の要素に入れる．同様にして，$T_{\boldsymbol{j}2}$ に含まれる $B_{\boldsymbol{j}211\cdots1}$ という閉円板を考え，対応する有限列を $\boldsymbol{j}''$ として $\mathcal{T}$ の要素に入れる．明らかに $E \cap V_i \subset T_{\boldsymbol{j}'} \cup T_{\boldsymbol{j}''}$ である．

以上から，各 $E \cap V_i$ は1つまたは2つの $T_{\boldsymbol{j}}$, $\boldsymbol{j} \in \mathcal{T}$, によって覆われることがわかり，$E \subset \bigcup_{\boldsymbol{j} \in \mathcal{T}} T_{\boldsymbol{j}}$ が成り立つ．また，(8.29)-(8.31) より (8.28) が従う．　□

定理 8.14

上述のアポロニウスの詰め込みの剰余集合 E に対し，$\dim E > 1$ が成り立つ．

証明　ε と m を $t = (\log 3 + m^{-1}\log(1-\varepsilon))/\log(\lambda+\varepsilon) > 1$ となるように定め

ることができる．すると，補題8.12と8.13より，任意の開円板によるEの有限被覆$\{V_i\}$に対して$\sum_i |V_i|^t \geq 4^{-t}c$を得る．したがって，任意の$E$の被覆$\{U_i\}$に対しては，各$U_i$を$|V_i| \leq 2|U_i|$を満たすような開円板$V_i$で覆い，$E$のコンパクト性を用いれば，$\sum_i |U_i|^t \geq 2^{-t}4^{-t}c$が成り立つことがわかる．こうして$\mathcal{H}^t(E)>0$を得る． □

もちろん，上述の証明により，行列の積の極限に登場する数λに対して，$\dim E \geq \log 3/\log \lambda$の成り立つことがわかる．

Hirst(1967)は，4つの行列の積$M_{j_1}\cdots M_{j_4}$に関する精巧な評価を用いて，$\dim E>1.001$となることを示した．一方，Boyd(1973*a*)は数値的にいくらでも精度よく$\dim E$を評価する方法を考案し，現在では$1.300<\dim E<1.315$となることが知られている．Larman(1967*b*)は全く異なる方法を用いて，領域の閉円板による詰め込みに対する剰余集合のハウスドルフ次元は，常に1.03以上であることを示した．

各辺が(凹型の)円弧からなる一般の曲線三角形に対するアポロニウスの詰め込み問題は，複素平面上の適当な**メービウス変換**(Möbius transformation) $z \to (az+b)/(cz+d)$のもとで同等であることに注意しよう．というのは，そのような変換は，(直線を半径が無限大の円として考えれば)円を円に写すという性質をもっており，したがって，任意の曲線三角形を別の任意の曲線三角形の上に写すような変換を見出すことができるからである．これから，特に，補題1.8により，すべての曲線三角形に対するアポロニウスの詰め込み問題の剰余集合は，同じハウスドルフ次元をもつことがわかる．さらに，TをそれぞれT_1, T_2, T_3に写すようなメービウス変換ψ_1, ψ_2, ψ_3を考えれば，その剰余集合Eは，$E=\bigcup_{j=1}^{3}\psi_j(E)$を満たすコンパクト集合であることがわかる．この場合，各ψ_jは縮小よりも弱い非拡大という性質しかもたないのであるが，それにもかかわらず，8.3節に述べた方法はアポロニウスの詰め込み問題に対しても有効である．この問題の一般化として，与えられたメービウス変換の組$\{\psi_j\}$に対して，$\psi_{j_1}\circ\cdots\circ\psi_{j_k}$のような型のあらゆる変換に対する極限集合のハウスドルフ次元を求める問題が考えられる．これについてはPatterson(1976)，Sullivan(1979)およびMandelbrot(1983)を参照されたい．

最大接触円による詰め込み$\{B_i\}$に対する**詰め込み指数**(exponent of the

packing) e とは，$\sum_{i=1}^{\infty}|B_i|^t<\infty$ を満たすような t の下限のことをいう．この詰め込み指数は重要な数であり，アポロニウスの詰め込みに対する指数 e はその剰余集合 E のハウスドルフ次元と一致している．この場合，$\dim E\leq e$ となることは比較的簡単に示すことができる(練習問題 8.6 を参照．また，Larman (1966) はより一般的な結果を得ている)．逆の不等式の方はさらに難しいのであるが，Boyd (1973*b*) によって示された．その要点は，行列の積を詳しく考察することによって，$t<e$ ならば，ある正定数 c が存在して，E を被覆する任意の曲線三角形族 $\{T_j: j\in\mathcal{T}\}$ に対して $\sum_{j\in\mathcal{T}} r_j^t\geq c$ が成り立つことを示すのである．そうすれば，補題 8.13 より，求める不等式が従うわけである．

Eggleston (1953*a*) は，正三角形に対して，逆向きの小正三角形による詰め込み問題を考察した(図 8.4 参照)．この場合の剰余集合のハウスドルフ次元は $\log 3/\log 2$ であり，この値は，そのような詰め込み問題の中では最も小さいものである(練習問題 8.7 を参照)．

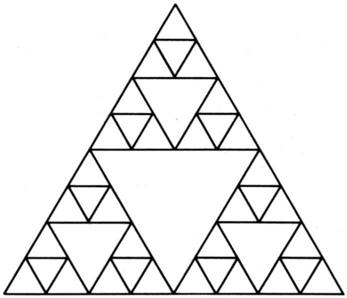


図 8.4

8.5　数論における例

数論の分野では，特にディオファントス近似の理論において，ハウスドルフ測度に関連した諸問題が多い．その典型的な例として，「有理数によって，ある精度で近似できる実数の集合のハウスドルフ次元はあまり大きくない」という結果がある．本節では，第6章で述べた射影定理と関連して，このような型の結果を取り扱うことにしよう．

実数 x から，それに最も近い整数点までの距離を $\|x\|$ で表わす．このとき，1次元および2次元における結果として，次の定理が成り立つ．

定理 8.15

任意に固定した $\alpha>0$ と，

(8.32) $$n_{j+1}\geq n_j^j$$

を満たすような正整数列 $n_1, n_2, \cdots$ に対して，次の結果が成り立つ．

（a） すべての $j=1,2,\cdots$ に対して，

(8.33) $$\|n_j x\|\leq n_j^{-\alpha}$$

を満たすような実数 x の集合を F とする．このとき，$\dim F=1/(1+\alpha)$ である．

（b） すべての $j=1,2,\cdots$ に対して，

$$\|n_j x\|, \|n_j y\|\leq n_j^{-\alpha}$$

を満たすような $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ の集合を G とする．このとき，$\dim G=2/(1+\alpha)$ である．

証明 （a） 各 j に対して，

(8.34) $$F_j=\bigcup_{i=-\infty}^{\infty}[in_j^{-1}-n_j^{-1-\alpha}, in_j^{-1}+n_j^{-1-\alpha}]$$

とおくと，明らかに

(8.35) $$F=\bigcap_{j=1}^{\infty}F_j$$

と表わすことができる．さて，任意の区間を I とすれば，各 j に対して，F と I の共通部分は $|I|n_j+2$ を越えない個数の長さ $2n_j^{-1-\alpha}$ の小区間で覆われることがわかる．これらの小区間の長さは，j が増加していくとき0に収束することから，結局，集合 $F\cap I$ の $\mathcal{H}^{1/(1+\alpha)}$ 測度は有限であることが従う．ゆえに，$\dim F\leq 1/(1+\alpha)$ を得る．

次に，F のハウスドルフ次元を下から評価しよう．そのために，定理1.15の方法が適用できるように F を少し修正して考え，任意に固定した $s<1/(1+\alpha)$ に対して $\mathcal{H}^s(F)>0$ を示すことにする．まず，一般性を失うことなく，すべての j に対して，$n_{j+1}n_j^{-1-\alpha}\geq 2$，$n_j^{\alpha}\geq 4$ および $n_1\geq 4$ が成り立っているとしてよい．そこで，

(8.36) $$m_j=[2n_{j+1}n^{-1-\alpha}-2]\geq n_{j+1}n_j^{-1-\alpha}\geq 2$$

とおく．ここで，[ ] は，その数を越えない最大の整数を表わすものとする．すると，ある定数 $c>0$ が存在して，すべての $j\geq 2$ に対して，

$$m_1\cdots m_{j-1}n_j^{-s(1+\alpha)}\geq c \tag{8.37}$$

が成り立つことがわかる．というのは，左辺において j を $j+1$ で置き換えた式との比を考えると，(8.36) と (8.32) から，

$$\begin{aligned} m_j n_{j+1}^{-s(1+\alpha)} n_j^{s(1+\alpha)} &\geq n_{j+1}^{1-s(1+\alpha)} n_j^{(s-1)(1+\alpha)} \\ &\geq n_j^{j(1-s(1+\alpha))+(s-1)(1+\alpha)} \end{aligned}$$

となり，$1-s(1+\alpha)>0$ であるから，十分大きな j に対しては，右辺は1より大きくなるからである．

さて，F_j を構成する各閉区間は，両端における重なり具合いによって，m_j，m_j+1 あるいは m_j+2 個の F_{j+1} を構成する小閉区間を含んでいる(ここでは，完全に含まれているような小閉区間しか考えていないことに注意)．そこで，このような重なり具合いによる場合分けの煩雑さを避けるために，次のような F の部分集合 F' を構成して考えることにしよう．まず，集合列 $\{F'_j\}$ を次のように帰納的に定める．F'_0 を単位区間とする．次に，互いに交わらない有限個の閉区間からなる F'_j が定まっているとして，この F'_j を構成する各閉区間に含まれているような F_{j+1} を構成する m_j 個の引き続いた小閉区間を適当に選んで F'_{j+1} を作るのである．こうして，$F'=\bigcap_{j=0}^{\infty}F'_j$ とおけば，明らかに $F'\subset F\cap[0,1]$ である．

次に，定理1.15の前で述べたようなカントール型集合の構成法に従って，$[0,1]$ の部分集合 E を次のように構成しよう．まず，$E_0=[0,1]$ とし，順次 $E_1, E_2, \cdots$ を，そこで述べられた方法に従って構成していくのであるが，E_j を構成する各閉区間は，ちょうど m_j 個の E_{j+1} を構成する小閉区間たちを含んでいるものとする．すなわち，小区間の個数と長さについての条件 (1.23) を，

$$m_j|J|^s=|I|^s \tag{8.38}$$

で置き換えるものとする．ここで，I は E_j を構成する各閉区間，J は E_{j+1} を構成する各閉区間である．すると，定理1.15の証明法より，集合 $E=\bigcap_{j=0}^{\infty}E_j$ のハウスドルフ次元は s であることがわかる．

最後に，集合 F' から E への自然な全単射 ψ を構成しよう．まず，任意の点 $x\in F'$ に対し，各 j について，F'_j の(左側から数えて) k_j 番目の小閉区間に x が属しているとする．このとき，各 j について E_j の k_j 番目の小閉区間に属

しているような一意的な点を $\psi(x)$ とするのである．さて，F' に属する任意の異なる2点 x, y に対し，x と y が F'_{j+1} を構成する異なる小閉区間に属しているような最小の j を考える．いま，x と y が属している2つの小閉区間の間に $k-1$ 個の小閉区間があるとすれば，

$$|y-x| \geq kn_{j+1}^{-1} - 2n_{j+1}^{-1-\alpha} \geq \frac{1}{2}kn_{j+1}^{-1} \tag{8.39}$$

が成り立つ．一方，$\psi(x)$ と $\psi(y)$ は E_j を構成している同じ閉区間 I に属してはいるが，E_{j+1} を構成している小閉区間に対しては，$\psi(x)$ と $\psi(y)$ は異なる小閉区間に属しており，その間には $k-1$ 個の小閉区間がある．したがって，(8.38), (8.37) および (8.36) を用いて，

$$\begin{aligned}|\psi(y)-\psi(x)| &\leq 2k|I|m_j^{-1} \leq 2k(m_1\cdots m_{j-1})^{-1/s}m_j^{-1} \\ &\leq 2kc_1 n_j^{-1-\alpha}m_j^{-1} \leq 2kc_1 n_{j+1}^{-1}\end{aligned}$$

を得る．ただし，$c_1 = c^{-1/s}$ である．そこで，(8.39) を用いると，

$$|\psi(y)-\psi(x)| \leq 4c_1|y-x|$$

が成り立つ．すなわち，ψ は一様リプシッツ写像であり，定理 1.8 より，$s = \dim E \leq \dim F' \leq \dim F$ を得るが，$s < 1/(1+\alpha)$ は任意であったから，以上まとめて，$\dim F = 1/(1+\alpha)$ を得る．

（b） 定理 1.15 および（a）を2次元版に修正することによって（b）を示すこともできるが，次のような方法もある．まず，直積集合に関する系 5.10 と（a）の結果より，集合 $G = F \times F$ のハウスドルフ次元は少なくとも $2/(1+\alpha)$ であることがわかる．次に，任意の単位正方形 S に対し，各 j について $F_j \times F_j$ の型の小正方形群を考えることによって，$G \cap S$ は，直径が $2^{\frac{1}{2}}n_j^{-1-\alpha}$ の $(n_j+2)^2$ 個の小正方形によって覆われることがわかる．ゆえに，$\dim(G \cap S)$ は $2/(1+\alpha)$ 以下である．したがって，$\dim G = 2/(1+\alpha)$ を得る． □

不等式 (8.33) を満たす実数 x は，各 j に対して，ある有理数 p_j/n_j が存在して，$|x - p_j/n_j| \leq n_j^{-1-\alpha}$ を満たしている．すなわち，この意味において，x は有理数によって「十分によく近似されている」といえる．

増大条件 (8.32) をおとして，単に不等式 (8.33) が無限個の n_j に対して成り立つような点 x の集合のハウスドルフ次元を求めるのは難しい問題である．この場合，(8.35) は上極限集合に置き換えられる．ここでは，Jarník によっ

て証明された定理の1次元の場合を，証明なしで述べるにとどめておく．この証明に関しては，どれもかなり技巧的であるが，Jarník(1931)，Besicovitch (1934*b*)，Eggleston(1952) および Kaufman(1970, 1981) を参照されたい．なお，Good(1941) は連分数との興味ある関係を論じている．定理(b)の方は，与えられた不等式を満たす n の増大度に関する結果である．

定理 8.16

任意に固定した $\beta>1$ に対して次の結果が成り立つ．

(a)　次の不等式

$$\|nx\|\leq n^{-\beta}$$

が無限個の n に対して成り立つような実数 x の集合のハウスドルフ次元は $2/(1+\beta)$ である．

(b)　$m_1, m_2, \cdots$ を，$m_{j+1}\geq m_j^j$ を満たすような正整数からなる任意の増大列とする．このとき，無限個の j に対して，次の不等式

$$\|nx\|\leq nm_j^{-1-\beta} \qquad \text{および} \qquad n\leq m_j$$

を満たす n が(j に依存して)存在するような実数 x の集合のハウスドルフ次元は $2/(1+\beta)$ である．

次に，定理 8.15(b) で定義した平面内の集合 G を直線上に射影した集合について考察しよう．以下に示されるように，G の射影の例外方向のなす集合はとりうる最大の次元をもっていることがわかる(定理 6.8 を参照)．

定理 8.17

$n_1, n_2, \cdots$ を，$n_{j+1}\geq n_j^j$ を満たすような正整数からなる任意の増大列とする．任意に固定した $0<s\leq 1$ に対して，すべての $j=1, 2, \cdots$ について

$$\|n_jx\|, \|n_jy\|\leq n_j^{1-2/s}$$

を満たすような実数 $-1\leq x, y\leq 1$ からなる点 $(x, y)\in\mathbb{R}^2$ の集合を G とする．このとき，$\dim G=s$ であり，さらに，次の集合

$$\{\theta\colon \dim(\mathrm{proj}_\theta(G))<s\} \tag{8.40}$$

のハウスドルフ次元は s 以上である．

証明　定理 8.15(b) より，ただちに $\dim G=s$ が従う．さて，任意に固定

した$\delta>0$に対して,

$$A_\delta=\{a: \text{無限個の}\ j\ \text{に対して},\ \|na\|\le nn_j^{-2/s}\ \text{かつ}\ 1\le n\le n_j^{1-\delta}$$
$$\text{を満たすような}\ n\ \text{が}(j\ \text{に依存して})\text{存在する}\}$$

とおく．すると，定理8.16(b)において，$m_j=n_j^{1-\delta}$および$\beta=2/s(1-\delta)-1$とおくことによって,

$$\dim A_\delta=s(1-\delta) \tag{8.41}$$

を得る．次に，各$a\in\mathbb{R}$に対して，線形写像ψ_a: $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$を

$$\psi_a(x,y)=ax+y \tag{8.42}$$

と定義しよう．さて，任意の$a\in A_\delta$に対して，十分大きなjが存在して,

$$1\le n\le n_j^{1-\delta} \tag{8.43}$$

および

$$|na-b|\le nn_j^{-2/s}$$

を満たす整数nとbを見出すことができる．すなわち,

$$|a-b/n|\le n_j^{-2/s} \tag{8.44}$$

が成り立つ．そこで，$|u|,|v|\le n_j$を満たす整数u,vに対して，$u=qn+r$, $0\le r<n$, を満たす整数q,rをとれば，ベクトルの意味で,

$$(u,v)=(qn,-qb)+(r,v+qb)$$

と書くことができる．さらに，$a'=b/n$とおけば,

$$\psi_{a'}(u,v)=\psi_{a'}(qn,-qb)+\psi_{a'}(r,v+qb)$$
$$=0+\psi_{a'}(r,v+qb)$$

を得る．すると，$c=2(1+|b|)$として，(u,v)が動くとき，$(r,v+qb)$は高々cnn_j個の異なった値しかとらないことがわかる．ゆえに$\psi_{a'}(u,v)$もそうであり，したがって$\psi_{a'}(un_j^{-1},\ vn_j^{-1})$に対しても同様である．ところで，$G$に属する点は，何らかの$u,v$が存在して，$(un_j^{-1},vn_j^{-1})$から$n_j^{-2/s}$以内の距離にあることから，集合$\psi_{a'}(G)$は$cnn_j$個の長さ$2(|a'|+1)n_j^{-2/s}$の閉区間によって覆われている．一方で，(8.44)から，$|x|,|y|\le 1$ならば$|\psi_a(x,y)-\psi_{a'}(x,y)|\le n_j^{-2/s}$であるから，結局，集合$\psi_a(G)$は$cnn_j$個の長さ$2(|a'|+2)n_j^{-2/s}$の閉区間によって覆われることがわかる．このとき，$j$はいくらでも大きくとることができるから，$j\to\infty$のときに$nn_jn_j^{-2t/s}\to 0$が成り立つならば，$\mathcal{H}^t(\psi_a(G))=0$であることが従う．ところが，(8.43)より，$t>\left(1-\dfrac{1}{2}\delta\right)s$ならば，この条件が満たされている．

以上から，任意に固定した$\delta>0$に対して，$a\in A_\delta$ならば$\dim(\psi_a(G))<s$が成り立ち，したがって，任意の$a\in A=\bigcup_{\delta>0}A_\delta$に対して成り立つのである．ゆえに，(8.41)より$\dim A=s$を得る．ところで，ψ_aの定義から，$a=\cot\theta$とおけば，集合$\psi_a(G)$と$\mathrm{proj}_\theta(G)$とは幾何学的に相似であり，したがって両者のハウスドルフ次元は等しい．したがって，s以上のハウスドルフ次元をもつθの集合上で，$\dim(\mathrm{proj}_\theta(G))<s$が成り立つのである．□

上述の例とその高次元への拡張は，Kaufman & Mattila (1975)によって与えられた．これは，Marstrand (1954 *a*)およびKaufman (1969)による以前の結果を改良するものである．一方，例外方向のなす集合の最大次元に関するMattila (1975*b*)の結果より，集合(8.40)のハウスドルフ次元は正確にsであることがわかる．このような数論における例は，しばしば射影に関して最悪の振舞いを呈するようである．

数論におけるハウスドルフ測度の応用に関しては，Eggleston (1952), Baker & Schmidt (1970), Rogers (1970)およびBaker (1978)を参照されたい．また，ディオファントス近似に関しては，Baker (1975)あるいはSchmidt (1980)に詳しい．

8.6　凸集合への応用

この節では，凸集合の幾何学に登場するハウスドルフ測度に関連した問題をいくつか述べよう．まず，次に示す2つの定理は，凸集合の表面はあまり不規則にはならないということを主張するものである．また，3つめの定理は，射影定理の1つの応用として得られるものである．

$\mathbb{R}^3$内の(コンパクトな)凸体Kに対して，点xがKの表面∂Kの**特異点**(singular point)であるとは，点xにおけるKの接平面が2つ以上存在するときにいう．次に述べる定理とその高次元への拡張はAnderson & Klee (1952)によって与えられたものである．また，Besicovitch (1963*a*)もその別証明を与えている．

定理 8.18
Kを$\mathbb{R}^3$内の凸体とする．このとき，∂Kの特異点のなす集合は，長さ有限の曲線の可算和に含まれ，したがって，σ有限の$\mathcal{H}^1$測度をもつ．

証明 Kと交わらない平面Πを適当に固定し，$f\colon \Pi\to\partial K$を「最短点」写像とする．すなわち，各点$x\in\Pi$に対して，$f(x)$を，$|f(x)-x|$が最小になるような∂K上の点として定めるのである．（Kは凸集合だから，このような点は一意的に存在する．）このとき，fは距離を増さない写像になる．すなわち，任意の$x,y\in\Pi$に対して，

$$|f(x)-f(y)|\leq|x-y| \tag{8.45}$$

が成り立つ．というのは，$f(x)$と$f(y)$を結ぶ線分$[f(x),f(y)]$はKに含まれていることから，4点$x,f(x),f(y),y$の作る（ねじれているかもしれない）四辺形における角$\angle xf(x)f(y)$および$\angle yf(y)f(x)$は，ともに$\frac{1}{2}\pi$以上でなければならないからである．さて，fによるΠの像を∂K_Πと書く．これは，粗く言えば，Πの側にある∂Kの点の集合のことである．すると，容易にわかるように，点zが∂K_Πの特異点であれば，$f^{-1}(z)$は線分を含んでいることがわかる．特に，zがKを含むような円錐の頂点になっているような場合には，$f^{-1}(z)$は閉円板を含んでいる．そこで，Πに適当に直交座標を定め，両端点の各座標が有理数になっているようなΠ内の線分の全体を$\{L_i\}_1^\infty$とする．このとき，∂K_Πの特異点zに対して，何らかのiが存在して，$f^{-1}(z)$はL_iと交わるような線分を必ず含んでいることがわかる．すなわち，∂K_Πの特異点は$\bigcup_i f(L_i)$に含まれている．ところが，(8.45)より，∂K内の部分集合$f(L_i)$は長さ有限の曲線であるか，さもなければ1点だけからなる集合である（3.2節を参照）．ゆえに，∂K_Πの特異点のなす集合は長さ有限の曲線の可算和に含まれており，したがって，σ有限の$\mathcal{H}^1$測度をもっている．

最後に，Kを包みこむような四面体を適当に固定する．その四面体の各面を含む平面を$\Pi_1,\cdots,\Pi_4$とすれば，明らかに∂Kの任意の特異点は，何らかのj $(1\leq j\leq 4)$に対して∂K_{Π_j}の特異点になっていることがわかる．したがって，∂Kの特異点のなす集合はσ有限の$\mathcal{H}^1$測度をもつのである． □

上述の証明から，凸体Kの特異点のうちで，Kを含む円錐の頂点になっているようなものは高々可算個であることが容易に従う．（というのは，すでに

述べたように，そのような ∂K の特異点 z に対して，$f^{-1}(z)$ はある閉円板を含むのであるが，平面 Π に含まれる互いに交わらない閉円板は高々可算個だからである．)

Klee (1957) は，凸体の表面に含まれるような線分の方向のなす集合はどのような大きさであるかという問題を提出した．これに関して，McMinn (1960) は3次元の場合を解決した．ここでは Besicovitch (1963*b*) の与えた証明を簡単にして述べることにしよう．

定理 8.19

K を $\mathbb{R}^3$ 内の凸体とする．このとき，∂K に含まれる線分のなす方向の集合（単位球面上の集合とみなして）は σ 有限な $\mathcal{H}^1$ 測度をもつ．

証明　2つの平面 Π_1 と Π_2 を考えて，∂K との交わりがそれぞれ凸曲線 Γ_1, Γ_2 になるようなものを適当に固定する．まず，Γ_1 と Γ_2 の両方に交わるような ∂K 内の線分の方向のなす（コンパクト）集合の $\mathcal{H}^1$ 測度が σ 有限になることを示そう．そのために，写像 $f_1\colon \Gamma_1 \to \Gamma_2$ を次のように定める．各 $x \in \Gamma_1$ に対し，Γ_1 と Γ_2 が同じ側にあるような平面 Π で，Γ_1 上の点 x を含み，かつ Γ_2 とも交わるようなものを任意に考える．このとき，$\Pi \cap \Gamma_2$ は1点のみからなる集合であるか，あるいは線分であるかのいずれかである．このような Π を動かしたときの $\Pi \cap \Gamma_2$ の和集合は，やはり1点のみからなる集合であるか，あるいは Γ_2 の閉部分弧であるかのいずれかである．そこで，前者の場合にはその点を $f_1(x)$ とし，後者の場合にはその部分弧の中点を $f_1(x)$ と定めよう．すると，明らかに f_1 は単調関数になり，したがって，有界変動関数である．次に，関数 $g_1\colon \Gamma_1 \to \mathbb{R}^3$ を，ベクトルの意味で $g_1(x) = f_1(x) - x$ と定義すれば，g_1 も有界変動である．したがって，g_1 と Π_1 上への正射影との合成関数 $\mathrm{proj}_{\Pi_1} \circ g_1\colon \Gamma_1 \to \Pi_1$ も有界変動になる．ゆえに，練習問題 3.1 の結果より，$\mathrm{proj}_{\Pi_1}(g_1(\Gamma_1))$ は有限の $\mathcal{H}^1$ 測度をもつ．ところが，集合 $\mathrm{proj}_{\Pi_1}(g_1(\Gamma_1))$ は，各線分 $[x, f_1(x)]$, $x \in \Gamma_1$, を Π_1 上に正射影したときの線分の方向に関する集合であるから，結局，このような線分のなす方向の集合は有限の $\mathcal{H}^1$ 測度をもつことがわかる．

全く同様にして，関数 $f_2\colon \Gamma_2 \to \Gamma_1$ を定義することができる．このとき，線分 $\{[f_2(y), y]\colon y \in \Gamma_2\}$ のなす方向の集合が有限な $\mathcal{H}^1$ 測度をもつことが同様

に従う．

さて，$x \in \Gamma_1$ かつ $y \in \Gamma_2$ であるような ∂K 内の線分 $[x, y]$ で，$[x, f_1(x)]$ や $[f_2(y), y]$ の形に表わされないようなものを考えよう．このとき，2つの場合が生じる．まず，点 x が Γ_1 内の線分 L_1 に含まれ，かつ点 y も，それに平行な Γ_2 内の線分 L_2 に含まれているような場合を考える．このとき，明らかに線分 $\{[x, y]: x \in L_1,\ y \in L_2\}$ のなす方向の集合は有限な $\mathcal{H}^1$ 測度をもっている．また，凸曲線は高々可算個の線分しか含まないことから，そのような線分 L_1, L_2 の組も高々可算個である．次に，点 x と点 y がそれぞれ Γ_1 と Γ_2 の特異点(すなわち，2つ以上の接平面をもつような点)である場合を考える．この場合，明らかに，そのような線分 $[x, y]$ は高々可算個である．したがって，上述の2つの型に属する線分 $[x, y]$ のなす方向の集合は σ 有限な $\mathcal{H}^1$ 測度をもつことがわかる．以上まとめて，Γ_1 と Γ_2 の両方に交わるような ∂K 内の線分のなす方向の集合は σ 有限な $\mathcal{H}^1$ 測度をもつのである．

最後に，各座標軸に対し，それに垂直な平面で，座標軸との交点が有理数になっているようなものすべてを考えよう．すると，容易にわかるように，∂K に含まれる任意の線分に対し，それと交わるような一組の平行な平面を，この平面族の中から見出すことができる．ゆえに，そのような線分のなす方向の集合は σ 有限な集合の可算和に含まれ，したがって，σ 有限な $\mathcal{H}^1$ 測度をもつのである． □

Ewald, Larman & Rogers(1970) は上述の定理の高次元版を研究して，$\mathbb{R}^n$ 内の凸体 K に対し，K の境界に含まれるような k 次元球のなす方向 ($G_{n,k}$ の意味において)の集合は σ 有限な $\mathcal{H}^{k(n-k-1)}$ 測度をもつことを示した．

Burton(1979) は，凸体の境界に含まれる線分(あるいは，一般に k 次元球)に関連した測度の問題を考察した．また，Larman(1971b) は，凸体の面の相対境界からなる和集合の測度について論じている．

Klee(1959) の有名な結果によれば，あらゆる平面との交わりが多角形になるような $\mathbb{R}^3$ 内の凸体 K は，ポリトープ(有限個の点集合の凸閉包)に限られる．これに関連して，ほとんどすべての方向に関してほとんどすべての平面との交わりが多角形になるような凸体 K の**端点** (extreme point) (すなわち ∂K の点で，K に含まれる線分の内点にはならないような点)は，高々可算個であ

ろうという予想があったのであるが，Dalla & Larman(1980) によって否定的に解決された．実際，彼らは，端点の集合のハウスドルフ次元が1になるような例を構成したのである．ここでは，彼らの複雑な構成法を述べる代わりに，射影定理を用いて，彼らの例は起こりうる最悪の場合であるということを示そう．

定理 8.20
Kは$\mathbb{R}^3$内の凸体とし，ほとんどすべての平面との交わりが多角形であるとする．このとき，Kの端点からなる集合Eのハウスドルフ次元は1以下である．

証明　この定理は，ボレル集合EにMattila流の射影定理を応用することによって容易に導くことができる(6.3節の最後を参照のこと)．さて，$\dim E>1$であるとすれば，任意に固定した$0<t<\dim E-1$に対し，ほとんどすべての単位ベクトル$\boldsymbol{\theta}$に対して，

$$\mathcal{H}^t(E\cap \mathrm{proj}_{\boldsymbol{\theta}}^{-1}\boldsymbol{u})=\infty$$

を満たす$L_{\boldsymbol{\theta}}$上の点$\boldsymbol{u}$の集合は正の$\mathcal{L}^1$測度をもつ．ただし，$L_{\boldsymbol{\theta}}$は原点を通る$\boldsymbol{\theta}$方向の直線であり，$\mathrm{proj}_{\boldsymbol{\theta}}$は$L_{\boldsymbol{\theta}}$上への正射影である．したがって，そのような$\boldsymbol{\theta}$と$\boldsymbol{u}$に対して，平面$\mathrm{proj}_{\boldsymbol{\theta}}^{-1}\boldsymbol{u}$と$E$との交わりは無限集合になる．ところが，$K$の端点は同時に平面内の凸集合$K\cap \mathrm{proj}_{\boldsymbol{\theta}}^{-1}\boldsymbol{u}$の端点でもあるから，このような平面と$K$との交わりは多角形ではあり得ない．　□

8.7　力学系のアトラクター

数学および数理物理学の分野において，本書の執筆中に大きく発展してきたものの1つに，力学系の「カオス」と「ストレンジ・アトラクター」の研究がある．そこで，この節では，力学系のアトラクターに関する基本的な性質を簡潔に述べることにする．

fを距離空間(通常は$\mathbb{R}^n, n\geq 1$, の部分集合)からそれ自身への写像とする．このとき，初期値$\boldsymbol{x}$に対する点列$\{f^m(\boldsymbol{x})\}_{m=1}^{\infty}$を**軌道**(orbit)と呼び，特に$m$が十分大きいときの，いろいろな初期値に対する軌道の振舞いを考えてみよう．

(ただし，f^m は f の m 回反復である.) 例えば，周期的な軌道あるいは周期軌道に収束する軌道のように規則的な場合もあるし，$\{f^m(x)\}$ が空間内をほとんどでたらめに動き回っているように見える場合も起こりうる．こうして，f の**不変集合**(invariant set) E，すなわち $f(E)\subset E$ を満たすような集合 E の研究に導かれる．初期値 $x\in E$ から出発すれば，$f^m(x)$ はすべての m に対して E 内にとどまっているわけである．さらに，f が連続であれば，不変集合の閉包もまた不変集合になるから，与えられた連続写像 f に対して，その不変閉集合を見出すことが問題となる．特に興味深いのは，不変集合が微細な構造をもつような場合である．そのような最も簡単な例として，$f(x)=\frac{3}{2}(1-|2x-1|)$ で定義される実関数 $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ をあげることができよう．この場合，カントール集合が不変集合になる(練習問題 8.8 を参照)．また，注目すべき集合としてジュリア集合がある．Mandelbrot (1982, 19 節) は，複素平面上の 2 次変換 $z\to z^2-\mu$ に対するジュリア集合($f(E)=E$ によって定義される)をいろいろな μ の値に対して描き出している．

しかし，実際に重要な不変集合は，それらに固有のある種の安定性を備えていなければならない．そうでなければ物理的に観測されないし，コンピュータによって実現できそうもないからである．このような不変集合が**アトラクター**(attractor)と呼ばれているものである．いろいろなアトラクターの定義が与えられているけれども，本質的には，f のアトラクターとは，$f(E)\subset E$ を満たす閉集合 E で，E を含む大きな集合 V (例えば E の開近傍など) に対して，$x\in V$ ならば，$f^m(x)$ と E との距離が $m\to\infty$ のとき 0 に収束するようなものとして定義される．さらに，通常は，E はある意味で最小のものとして定められる．例えば，軌道 $\{f^m(x)\}$ が E 内で稠密になるような初期値 x の存在することが要求される．このとき，E が微細な構造をもっているか，あるいは，初期値に対する依存が敏感である(すなわち，十分に近い 2 点から出発しても，f の反復によって，しだいに異なる挙動を示すようになる)場合には，特に，E はストレンジ・アトラクターと呼ばれる．しかしながら，どのような関数がストレンジ・アトラクターをもつのか，なぜそのようなアトラクターが生じるのか，あるいは，その構造は何か，といった多くの問題が未解決である．これらの問題は，分岐理論，エルゴード理論，微分幾何学，そして関数解析学と深くかかわっており非常に複雑である．1 次元および 2 次元の写像に関する概説と

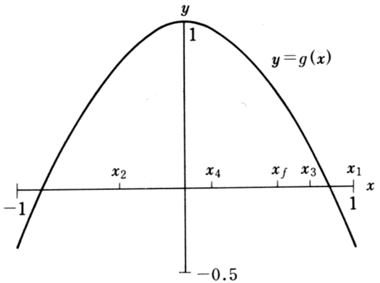


図 8.5

しては，Whitley (1983) を参照していただきたい．

区間からそれ自身への連続写像に関する研究は，主に Feigenbaum (1978, 1979) および Jonker & Rand (1981*a*, 1981*b*) たちによって，最近大幅に発展している．ここでは，Grassberger (1981) によって考察された関数について詳しく述べよう．この関数は，一見したところでは，かなりくふうして作られた感じがするが，解析しやすいし，また非常に重要な関数なのである．

次の関数方程式(renormalization equation として知られている)

$$g(g(x/\alpha)) = -g(x)/\alpha \tag{8.46}$$

を条件 $g(0)=1$ のもとで考えよう．この方程式が $\alpha=2.50290\cdots$ なる値に対して，$[-1,1]$ 上で定義された実解析的な偶関数 g を解にもつことを示すのは，かなり難しいことである (Campanino & Epstein (1981) および Lanford (1982) を参照)．(この解は局所的に一意的であるが，(8.46) が他の α の値に対して解をもつかどうかは知られていない．)　この $[-1,1]$ 上の関数 g は，小数点以下第四位までの精度で，次のように表わされる：

$$g(x) = 1-1.5276x^2+0.1048x^4+0.0267x^6 -0.0035x^8+0.0008x^{10}+0.0003x^{12}. \tag{8.47}$$

また，図 8.5 にそのグラフを示す．次に，8.3 節の考え方を用いて，g のアトラクターのハウスドルフ次元を評価しよう．

定理 8.21

各 $k\geq 0$ に対して，g は一意的な周期 2^k の(不安定な)周期解をもち，また

$0.5345<\dim E<0.5544$ を満たすような不変閉集合 E をアトラクターとしてもつ．また，任意の初期値 $x\in[-1,1]$ に対して，$g^m(x)$ が十分大きな m に対して周期点になるか(このようなことは可算個の x に対してだけしか起こらない)，あるいは，$g^m(x)$ と E との距離が $m\to\infty$ のときに 0 に近づくかのいずれかが成り立つ．さらに $x\in E$ であれば，その軌道 $\{g^m(x)\}_1^\infty$ は E 内で稠密である．

証明　関数方程式 (8.46) を反復すれば，g が偶関数であることを用いて

$$g^{2^k}\left(\left(-\frac{1}{\alpha}\right)^k x\right)=\left(-\frac{1}{\alpha}\right)^k g(x) \tag{8.48}$$

が任意の $k\geq 0$ に対して成り立つことがわかる．そこで，簡単のために，$x_m=g^m(0)$ と書こう．すると $x_{2^k}=(-1/\alpha)^k, k\geq 0$, であり，最初の 4 点を求めると，

$$x_1=1,\quad x_2=-0.3995,\quad x_3=0.7589,\quad x_4=0.1596$$

のようになる．次に，開区間 (x_2,x_1) を V とおき，$\bar{V}$ 上の写像 ψ_1,ψ_2 を

$$\psi_1(x)=-\frac{1}{\alpha}x,\qquad \psi_2(x)=g^{-1}\left(-\frac{1}{\alpha}x\right) \tag{8.49}$$

のように定義する．ただし，g^{-1} は常に正の値をとるものとする．すると，

$$\psi_1(V)=(x_2,x_4),\qquad \psi_2(V)=(x_3,x_1)$$

が成り立ち，縮小写像 ψ_1,ψ_2 は開集合条件を満足することがわかる(8.3 節を参照)．したがって，定理 8.3 および 8.8 より，$E=\psi_1(E)\cup\psi_2(E)$ を満たす一意的なコンパクト集合 E が存在して，$s\leq\dim E\leq t$ を満たす．ここで，s と t は，次の等式

$$(\inf|\psi_1'(x)|)^s+(\inf|\psi_2'(x)|)^s=1=(\sup|\psi_1'(x)|)^t+(\sup|\psi_2'(x)|)^t$$

によって定まる正数で，上式の上限および下限は，ともに $x\in\bar{V}$ にわたるものである．ところが，g'，したがって $(g^{-1})'$ の区間 $\bar{V}$ における極値は $\bar{V}$ の端点において達成されるから，

$$\alpha^{-s}+(\alpha|g'(x_1)|)^{-s}=1=\alpha^{-t}+(\alpha|g'(x_3)|)^{-t}$$

が成り立ち，g の微係数を直接計算することによって，$0.5345<\dim E<0.5544$ を得る．

次に，g の軌道の振舞いを考察しよう．明らかに $g[-1,1]\subset\bar{V}$ であるから，初期値として $\bar{V}$ 内の点のみを考えれば十分である．さて，$g(-(1/\alpha)x)>0$ に注意して (8.46) を変形すれば，$g(-(1/\alpha)x)=g^{-1}(-(1/\alpha)g(x))$ を得るから，

したがって，

$$g\circ\psi_1=\psi_2\circ g, \qquad g\circ\psi_2=\psi_1 \tag{8.50}$$

が $[-1,1]$ 上で成り立つ．そこで簡単のために，$\psi_{j_1}\circ\psi_{j_2}\circ\cdots\circ\psi_{j_k}$ を $\psi_{j_1j_1\cdots j_k}$ と書くことにすれば，

$$\begin{cases} g\circ\psi_{11\cdots1}=\psi_{22\cdots2}\circ g, \\ g\circ\psi_{11\cdots12j_i\cdots j_k}=\psi_{22\cdots21j_i\cdots j_k} \qquad (2\leq i\leq k+1) \end{cases} \tag{8.51}$$

が成り立つ．また，$g(\bar{V})\subset\bar{V}$ であるから，8.3節と同様にして，$\psi^k(\bar{V})=\bigcup_{j_1\cdots j_k}\psi_{j_1\cdots j_k}(\bar{V})$ と書くことにすれば，

$$g(\psi^k(\bar{V}))\subset\psi^k(\bar{V}) \tag{8.52}$$

を得る．すなわち，$\psi^k(\bar{V})$ 内の任意の点は，g の反復によって $\psi^k(\bar{V})$ 内にとどまるのである．さらに (8.51) より，任意の $x\in\psi^k(\bar{V})$ に対して，点 $g^m(x)$ は，m が増すにつれて，2^k 個の互いに交わらない集合 $\psi_{j_1\cdots j_k}(\bar{V})$ を順に巡っていることがわかる．

さて，$[-1,1]$ 上の関数 g の一意的な不動点を $x_f=0.5493\cdots$ とおく．すると，(8.48) より，点 $(-1/\alpha)^k x_f$ は，したがって点 $g^m((-1/\alpha)^k x_f)$ も，2^k の約数を周期にもつ周期点であることがわかる．ところが，上で述べたように，$g^m((-1/\alpha)^k x_f)$ は，m が増していくとき異なる 2^k 個の $\psi_{j_1\cdots j_k}(\bar{V})$ 内を巡るのであるから，正確に周期 2^k の周期点であることが従う．($(-1/\alpha)^k x_f\in\psi_{11\cdots1}(\bar{V})$ であることに注意.)

次に，$g^m(x)$ が絶対にそのような周期点にはならないような初期値 $x\in\bar{V}$ を考える．このとき，$g^m(x)$ が集合 E に収束することを示そう．すでに述べたように，(8.52)から，もし $g^m(x)$ が $\psi^k(\bar{V})$ 内に入れば，以後ずっと $\psi^k(\bar{V})$ に属さなければならない．さて，各 $k\geq0$ に対して，$\psi^k(\bar{V})$ に属する点は，g の何回かの反復によって，必ず $\psi^{k+1}(\bar{V})$ に属することを以下に示そう．$g^m(x)\in\psi^k(\bar{V})$ とする．すなわち，何らかの $y\in\bar{V}$ が存在して，$g^m(x)=\psi_{j_1\cdots j_k}(y)$ であるとする．このとき，点 y は不動点 x_f ではない．g が不動点ならば，$g^m(x)$ は，(8.51) より周期 2^k の周期点になるからである．したがって，$y\in[x_2,x_4]\cup[x_3,x_1]$ であるか，$y\in[x_4,x_f)\cup(x_f,x_3]$ であるかのいずれかが成り立つ．ところで，後者の場合には，区間 $g^{-1}[x_4,x_3]=[-x_2,x_3]$ 上において $g'(x)<-1$ であることから，g の反復によって，点 y は不安定な不動点 x_f から離れていき，ついに何らかの r に対して $g^r(y)\in[x_2,x_4]\cup[x_3,x_1]$ の成り立

つことがわかる．ゆえに，いずれの場合においても，ある $r \geq 0$ を見出すことができて，$j=1$ あるいは2に対して，$g^r(y) \in \psi_j(\bar{V})$ が成り立つ．すると，(8.15) を繰り返し用いて，$g^{r2^k} \circ \psi_{j_1 \cdots j_k} = \psi_{j_1 \cdots j_k} \circ g^r$ が成り立つから，

$$
\begin{aligned}
g^{r2^k+m}(x) &= g^{r2^k}(\psi_{j_1\cdots j_k}(y)) \\
&= \psi_{j_1\cdots j_k}(g^r(y)) \subset \psi_{j_1\cdots j_k j}(\bar{V}) \subset \psi^{k+1}(\bar{V})
\end{aligned}
$$

を得る．以上から，周期軌道に落ち込まないような $\bar{V}$ 内の任意の点 x は，g の反復によって，すべての k に対して $\psi^k(\bar{V})$ に属することがわかった．ところが，(8.20) より $E = \bigcap_{k=0}^{\infty} \psi^k(\bar{V})$ であるから，$g^m(x)$ と E との距離は0に収束するのである．

最後に，$x \in E$ ならば，任意の k に対して，点列 $g^m(x)$ は 2^k 個の集合 $\psi_{j_1\cdots j_k}(\bar{V})$ 内を順に巡ることから，軌道 $\{g^m(x)\}$ は E 内で稠密である． □

$\dim E$ に関しては，十分大きな k に対して，縮小写像 $\psi_{j_1\cdots j_k}$ の微係数を評価することにより，任意の精度で求めることができる．実際 $\dim E = 0.538\cdots$ となることが知られている．Ruelle(1983) は，最近，そのような関数のアトラクターは s 集合になることを示した．ここで，s は写像の「圧力」と呼ばれる量を用いて定義される実数である．

上で考察した関数 g は，ある意味において，カオス挙動を示すような $[-1, 1]$ 上のかなり広い関数の特性を示すものである．$[-1, 1]$ からそれ自身へのなめらかな（2回連続的微分可能としよう）関数 f で，原点で最大値 $f(0)=1$ をとり，$f''(0)<0$ を満たし，$x<0$ では $f'(x)>0$，かつ $x>0$ では $f'(x)<0$ となるようなものを任意に考えよう．さらに，$0<\lambda<1$ に対し，$[-1, 1]$ 上の関数族 f_λ を $f_\lambda(x) = \lambda f(x)$ によって定めよう．このとき，十分小さい λ に対しては，f_λ は唯一の安定な不動点をもっている（安定であるとは，その付近の点が，f_λ の反復によって，その不動点に収束するという意味である）．ところが，徐々に λ の値を増していくと，その安定な不動点が不安定になり，その代わりに周期2の安定な周期点が出現するような λ_1 の値が見出される．同様にして，λ を増していくと，この2周期点が不安定化し安定な4周期点に分岐するような λ_2 の値があり，それらがさらに，λ_3 において安定な8周期点に分岐していく，といったことが繰り返されるのである．（この分岐過程に関しては May(1976)，Hofstadter(1981) あるいは Feigenbaum(1981) を参照されたい．特に，「ロ

ジスティック関数」$f(x)=1-2x^2$ (これは変数変換により $[0,1]$ 上の関数 $f(x)=4x(1-x)$ と同値である)についても参照のこと.) この過程に登場する数列 $\{\lambda_j\}$ に関して, Feigenbaum(1978, 1979, 1981) はいくつかの注目すべき性質を発見している. 実際, 単調増大列 $\{\lambda_j\}$ は $j\to\infty$ のとき, ある極限値 λ_∞ に収束するのであるが, このとき, 比 $(\lambda_{j+1}-\lambda_j)/(\lambda_{j+2}-\lambda_{j+1})$ の方も $\delta=4.669\cdots$ なる値に収束するということ, かつ, この値 δ は普遍定数, つまり, 考えている関数 f の形には依存しないということを発見したのである. このとき, 関数 f_{λ_∞} の軌道の振舞いは, 上述の関数 g と質的に同等であることが知られている. つまり, f_{λ_∞} は, 各 k に対して, 周期 2^k の不安定な周期軌道を1つもち, さらに区間内のほとんどすべての点をひきつけるようなカントール型の不変集合をもっている. また, λ_∞ を越えるような λ の値に対しては, 再び安定な周期点が出現し, 例えば, 安定な周期3の周期点が λ の増加につれて次々に分岐して周期 $3\cdot 2^j$ の周期軌道が出現するという具合に, 上と同様の分岐現象を繰り返すのである.

Feigenbaum は, f_{λ_∞} の周期点を考察することによって, 考えている任意の関数 f に対して,

$$\lim_{k\to\infty}(-\alpha)^k f_{\lambda_\infty}^{2^k}(x/\alpha^k)=g(x)$$

は関数方程式 (8.46) を満たすことを示した. ただし, $\alpha=2.5029\cdots$ であり, この値に対しては, 方程式の解の存在が知られているのであった. (座標変換により, 条件 $g(0)=1$ は満たされているとしてよい.) こうして, $m\to\infty$ のときの $f_{\lambda_\infty}^m$ の挙動に関する限り, f_{λ_∞} の反復は, 質的だけでなく, ある意味で量的にも, g の反復と同様であろうと期待される. 特に, f_{λ_∞} のアトラクターのハウスドルフ次元は g のそれと同じであろうと予想される. Grassberger(1981) は, いくつかの数値計算によって, 最初の分岐集積点 λ_∞ におけるストレンジ・アトラクターのハウスドルフ次元は $0.538\cdots$ になるということを報告している.

もちろん, 高次元空間においても同様の問題が生じるが, 数学的解析はかなり困難である. しかし, Smale(1967) によって導入された $\mathbb{R}^2$ 上の「馬てい形」微分同相写像は, 折りたたみと縮小の繰り返し結果として, いかにストレンジ・アトラクターが生じうるかということを, わかりやすく説明してくれる. 図8.6(a) で示したように, この写像 f は単位正方形 S 上で定義され, $f(a)=a'$

などのように対応している．ちょうど，正方形の上半分と下半分が馬てい形の両腕にそれぞれ写されているのである．また，図 8.6(b) に，f による最初のいくつかの反復 $f^m(S)$ を示した．S 上のすべての点が，f の反復によって，カントール型集合 $\bigcap_{m=0}^{\infty} f^m(S)$ に収束することは明らかであろう．f の定義を適当に変えることによって，そのアトラクターが 1 と 2 の間の任意に与えられた次元をもつようにできることもわかる．また，f による反復で帯状領域の幅がどんどん縮まることから，そのアトラクターは f の摂動に関して安定である．

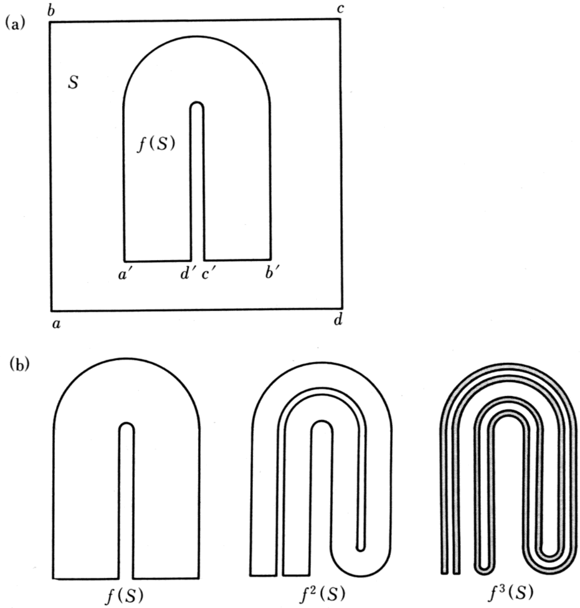


図 8.6

$\mathbb{R}^2$ における直交座標で表わされた次の写像

$$f(x,y)=(y+1-ax^2, bx)$$

(ただし，a と b は定数)は Hénon–Pomeau 写像として知られているものであるが，その数学的解析はより難しい．まず容易にわかることは，任意の点 $(x,$

$y)$ において，この写像のヤコビアンは $-b$ となり一定である．したがって，一様の比率で($|b|<1$ ならば)面積を縮めていることがわかる．この写像は，座標の線形変換の範囲内で，上述の性質をもつような $\mathbb{R}^2$ 上の2次変換の標準形であるという点において興味深い．もちろん，1次元のロジスティック関数(2次関数)とも関連しており，適当な (a,b) の値に対して，そのアトラクターは微細な構造をもつであろうと予想される．一方で，非整数次元の不変集合をもつような a と b の値はいくつか知られているけれども，この場合その不変集合はアトラクターにならない．Hénon & Pomeau (1976) は，$a=1.4$，$b=0.3$ のときのいくつかの軌道を考察している．最近の研究に関しては，Simó (1979) および Whitley (1983) を参照されたい．

これまでは離散力学系ばかり述べてきたけれども，類似の現象が連続な力学系，すなわさ，微分方程式系の解曲線族である**流れ**(flow)に対しても起こりうる．初期値 x から出発して時間 t 後の位置を $f_t(x)$ と書く．もし流れが自励系(すなわち，時間に依存しない微分方程式から導かれたもの)であれば，

$$f_{t_2}(f_{t_1}(x))=f_{t_1+t_2}(x)$$

が成り立つ．このとき，不変閉集合 E (すなわち，すべての $t\geq 0$ に対して，$f_t(E)\subset E$ を満たす閉集合)で，これを含むある集合内の点 x に対し，E 内の任意の点の任意の近傍に $f_t(x)$ が入るような十分大きな t が存在するという意味においてのアトラクターになっているようなものを見出す問題を考えよう．

Smale の馬てい形写像を利用して，ストレンジ・アトラクターをもつような流れを構成することができる．まず，断面が正方形であるようなトーラス V を考え，その内部で一定の速さをもち，ちょうど単位時間でトーラスを1周するような流れ f_t で，ある横断面 Π 上で，$x\in S=V\cap\Pi$ に対し $f_1(x)=f(x)$ となるようなものを考えよう．ただし，f は正方形 S 上で定義された馬てい形微分同相写像である．(このようにして V 上の流れを定義できることは明らかである．) このとき，この流れ f_t に対するアトラクターを E とすれば，$E\cap\Pi=\bigcap_{m=0}^{\infty}f^m(S)$ は馬てい形写像に対するアトラクターである．この集合を単に流れに沿ってトーラス内を1周させることによって，$E=\bigcup_{t=0}^{1}f_t(\bigcap_{m=0}^{\infty}f^m(S))$ を得る．こうしてアトラクター E は，局所的には馬てい形アトラクターと線分との直積であり，5.3節の結果を用いることによって，そのハウスドルフ次元は $1+\dim\bigcap_0^{\infty}f^m(S)$ に等しいことがわかる．あるいは，アトラクター E は，

局所的には1次元カントール集合と正方形との直積であると考えることもできる．

実際には，微分方程式の流れが作る力学系はかなり複雑になる場合があり，上述のようには簡単に説明できないものがある．例えば，気象の方程式から Lorenz (1963) によって導かれた次の微分方程式系

$$(8.53)\qquad \begin{cases} \dot{x}=\sigma(y-x), \\ \dot{y}=rx-y-xz, \\ \dot{z}=xy-bz \end{cases}$$

(ただし，σ, r, b は定数)は，おそらく，ストレンジ・アトラクターに関連して最もよく研究されてきたものであろう．この方程式系のアトラクターや分岐現象に関しては Sparrow (1982) の本に詳しい．また，カオス現象が起こるようないくつかの場合が知られているが，特に，$\sigma=10$，$r=28$，$b=\frac{8}{3}$ の場合が広く研究されている．

Temam (1983) は，流体力学におけるナヴィエ・ストークス方程式を研究し，特に，アトラクターのハウスドルフ次元だけでなく，時空間座標における弱解の特異点のなす集合のハウスドルフ次元に対しても評価を与えた．

最近では，力学系のアトラクターのハウスドルフ次元を，軌道の運動に関係した量を用いて，特に，軌道のリアプーノフ特性指数を用いて表わす研究が盛んである．（リアプーノフ指数とは，局所的に線形化した行列の固有値を軌道上で平均化したものである．） これについての概説およびいくつかの例に関しては，Frederickson, Kaplan, Yorke & Yorke (1983) を参照のこと．

アトラクターに関する詳しい研究や，乱流問題との関係については，Temam (1976)，Bernard & Raţiu (1977)，Haken (1982)，Guckenheimer & Holmes (1983) および Barenblatt，Iooss & Joseph (1983) を参照されたい．アトラクターに関しては，まだまだ多くの問題が未解決のままであり，実際，本節において引用した多くの結果についても，さらに厳密な数学的基礎付けを与えなければならないのである．

8.8　ブラウン運動

1827年，英国の植物学者 R. Brown は，水面に浮かぶ微粒子の動きを観測し，それが絶えずきわめて不規則に運動していることを発見した．この事実は，後に，液体分子からの衝撃によって説明された．また，同様の現象が，空気中の煙の微粒子に対しても観測された．1905年，Einstein はこのような運動に関する数学的研究を発表し，これが結果的に，アボガドロ数を計算することに成功した Perrin のノーベル賞受賞へとつながるのである．

ブラウン運動の数学的に厳密な確率モデルは，Wiener(1923) によって提案された．彼は，ブラウン運動と同様の偶然的運動を記述する「ウィナー過程」を構成したのである．この節では，このモデルについて説明し，また，確率1でブラウン運動の道のハウスドルフ次元が2になるという Taylor(1953) の証明を述べることにしよう．

$n \geq 1$ に対し，$\omega(0)$ が原点であるようなすべての連続関数 ω: $[0, \infty) \to \mathbb{R}^n$ の作る空間を Ω で表わす．ω を微粒子のたどる道と考え，$\omega(t)$ をその微粒子の時刻 t における位置と考える．このとき，Ω のかなり大きな部分集合族上で定義された $p(\Omega)=1$ なる確率測度 p で，次の性質を満たすものが存在する．

（a）道の**増分の独立性**(independent increment)，すなわち，任意の $t_1 \leq t_2 \leq t_3 \leq t_4$ に対して，$\omega(t_2)-\omega(t_1)$ と $\omega(t_4)-\omega(t_3)$ は独立である；

（b）任意の t に対して，$\omega(t+h)-\omega(t)$ は平均0で，分散 h の正規分布に従う．特に，道の増分の分布は**定常**(stationary)（$\omega(t+h)-\omega(t)$ は t に依存しない）であり，**等方**(isotropic)（方向に依存しない）であり，また

$$p\{\omega: |\omega(t+h)-\omega(t)| \leq \rho\} = ch^{-n/2}\int_0^\rho r^{n-1}\exp(-r^2/2h)\,\mathrm{d}r \tag{8.54}$$

が成り立つ．ただし，c は $p(\Omega)=1$ となるように選ばれた正定数である．

この確率測度 p は，かなり大きな Ω の部分集合族が可測になるように構成され，例えば，$\mathbb{R}^n$ 内のボレル集合 B_i に対し，$\{\omega: \omega(t_i) \in B_i\ (i=1, 2, \cdots, k)\}$ で表わされるような Ω の部分集合はすべて可測になる．しかし，このような確率過程が一意的に存在することを示すのはかなり複雑であり，興味ある読者は，例えば，Hida(1980) を参照されたい．実際には，測度 p は，必ずしも連

続とは限らない関数 ω: $[0,\infty)\to\mathbb{R}^n$ 全体の上で定義され，別の条件から，確率1で道が連続になることが導かれる．

$\mathbb{R}^n$ 内のブラウン過程を部分空間上に射影したものが，低次元のブラウン過程になることは容易に確かめられる．

ブラウン確率分布の重要性は，道の増分が独立，定常，等方かつ有限の分散をもつという点で本質的に一意的な分布であるという点にある．これらの諸条件は物理的には自然なものであると考えられる．

ブラウン運動は，また，歩幅が0に収束するときの乱歩(random walk)の極限として考えることもできる．確率過程が**統計的自己相似**(statistically self-similar)であるとは，任意の $\gamma>0$ に対して，2つの道 $\omega(t)$ と $\omega(\gamma^2 t)/\gamma$ とが同じ確率分布に従うときにいう．

補題 8.22

$0<\lambda<\dfrac{1}{2}$ とする．このとき，ほとんどすべての $\omega\in\Omega$ に対して，ある $h_0>0$ が存在して，

$$|\omega(t+h)-\omega(t)|\leq|h|^{\lambda}$$

が任意の $0\leq t\leq 1$ と $|h|<h_0$ に対して成り立つ．

証明 j と m を正整数とすれば，(8.54) より，$\lambda<\dfrac{1}{2}$ に注意して，

$$\begin{aligned}
&p\{\omega\colon |\omega(2^{-j}m)-\omega(2^{-j}(m-1))|>2^{-j\lambda}\}\\
&\quad=c2^{jn/2}\int_{2^{-j\lambda}}^{\infty} r^{n-1}\exp(-r^2 2^{j-1})\,dr\\
&\quad=c\int_{2^{j(1/2-\lambda)}}^{\infty} r^{n-1}\exp(-r^2/2)\,dr\\
&\quad\leq c_1\exp(-2^{j(1/2-\lambda)})\\
&\quad\leq c_2 2^{-2j}
\end{aligned}$$

を得る．ただし，c_1 と c_2 は j,m には依存しない正定数である．ゆえに，与えられた正整数 k に対して，

$$\begin{aligned}
&p\{\omega\colon |\omega(2^{-j}m)-\omega(2^{-j}(m-1))|>2^{-j\lambda}\text{ を満たすような}\\
&\qquad j>k\text{ と }1\leq m\leq 2^j\text{ が存在する}\}\\
&\quad\leq c_2\sum_{j=k}^{\infty}2^j 2^{-2j}=c_2 2^{-k}
\end{aligned}$$

が従う．したがって，ほとんどすべての $\omega\in\Omega$ に対して，十分に大きなすべての j とすべての $m=1,2,\cdots,2^j$ に対して，

(8.55)　$$|\omega(2^{-j}m)-\omega(2^{-j}(m-1))|\le 2^{-j\lambda}$$

が成り立つ．さて，与えられた十分に小さい正数 h に対して，任意の区間 $(t, t+h)\subset(0,1)$ を $(2^{-j}(m-1), 2^{-j}m)$，$2^{-j}\le h$，の形の 2 進区間の可算和に分解し，同じ長さの区間は高々 2 個しかないようにできる．(そのためには，$(t,t+h)$ に含まれる 2 進区間の中で，他のものには含まれていないようなもの全部を考えればよい．)　こうして，k を $2^{-k}\le h$ を満たす最小の整数とするとき，(8.55) と $\omega(t)$ の連続性を用いて，

$$|\omega(t+h)-\omega(t)|\le 2\sum_{j=k}^{\infty}2^{-j\lambda}=2^{-k\lambda}2/(1-2^{-\lambda})\le h^{\lambda}2/(1-2^{-\lambda})$$

を得る．この不等式は，h さえ十分に小さければ，任意の $0\le t<t+h\le 1$ に対して成立している．$\lambda<\frac{1}{2}$ も任意であったから，これで補題が示された．□

定理 8.23

確率 1 で，$\mathbb{R}^n$ $(n\ge 2)$ におけるブラウン運動の道のハウスドルフ次元は 2 である．

証明　(a)　まず，ポテンシャル論の方法を用いて，ほとんどすべての $\omega\in\Omega$ に対して，$\dim\omega\ge 2$ となることを示そう．任意に $1<s<2$ を固定する．すると，(8.54) より

$$\int_{\omega\in\Omega}\frac{\mathrm{d}p(\omega)}{|\omega(t+h)-\omega(t)|^s}=ch^{-n/2}\int_0^{\infty}r^{-s+n-1}\exp(-r^2/2h)\,\mathrm{d}r$$
$$=c_1h^{-s/2}$$

を得る．ただし，c_1 は h にも t にも依存しない正定数である．したがって，

$$\int_{u=0}^1\int_{t=0}^1\int_{\omega\in\Omega}\frac{\mathrm{d}p(\omega)\,\mathrm{d}t\mathrm{d}u}{|\omega(t)-\omega(u)|^s}=c_1\int_0^1\int_0^1\frac{\mathrm{d}t\mathrm{d}u}{|t-u|^{s/2}}$$
$$<\infty$$

が従う．ところで，ブラウン運動の可測性から，$|\omega(t)-\omega(u)|^{-s}$ は $[0,1]\times[0,1]\times\Omega$ 上の直積測度に関して可測であることがわかり，Fubini の定理より

$$\int_0^1\int_0^1\frac{\mathrm{d}t\mathrm{d}u}{|\omega(t)-\omega(u)|^s}<\infty$$

がほとんどすべての $\omega\in\Omega$ に対して成立する．

さて，道 ω 上には，$\mu_\omega(E)=\mathcal{L}^1\{t\colon 0\le t\le 1$ かつ $\omega(t)\in E\}$ を満たすような自然な質重分布 μ_ω が存在する．このとき，ほとんどすべての $\omega\in\Omega$ に対して，

μ_ω の s エネルギー $I_s(\mu_\omega)$ は有限となり，系 6.6(a) より，$s \le \dim(\omega[0,1]) \le \dim \omega$ を得る．$s<2$ は任意であったから，$\dim \omega \ge 2$ がほとんどすべての $\omega \in \Omega$ に対して成り立つ．

(b) 次に，上からの評価を与えるために，定理 8.1 で用いた方法を応用しよう．$s>2$ を任意に固定する．補題 8.22 より，ほとんどすべての $\omega \in \Omega$ に対して，ある $h_0>0$ が存在して，

$$|\omega(t+h)-\omega(t)| \le |h|^{1/s}$$

が任意の $0 \le t < t+h \le 1$ と $|h| \le h_0$ に対して成り立つ．ところで，そのような道 ω に対し，$0<h \le h_0$ ならば，部分弧 $\omega[t, t+h]$ は半径 $h^{1/s}$ の閉球に含まれることがわかる．したがって，$1/m \le h_0$ を満たす任意の整数 m に対して，$\omega[0,1]=\bigcup_{j=1}^{m} \omega[(j-1)/m, j/m]$ は半径が $m^{-1/s}$ の m 個の閉球で覆われている．ゆえに，$\delta \ge 2m^{-1/s}$ ならば，$\mathcal{H}^s_\delta(\omega[0,1]) \le m2^s(m^{-1/s})^s = 2^s$ が成り立つ．したがって，$m \to \infty$ として，$\mathcal{H}^s(\omega[0,1]) \le 2^s$ を得る．これは，任意の $s>2$ で成り立つことから，(1.14) より，$\mathcal{H}^s(\omega[0,1])=0$，したがって，$\mathcal{H}^s(\omega)=0$ となることがわかる． □

Taylor (1953) は，また，$\mathbb{R}^n$ 内のほとんどすべての道に対して，$\mathcal{H}^2(\omega)=0$ となることを示した．Ray (1963) および Taylor (1964) は，さらに精密な計算を実行することによって，確率 1 で，ブラウン運動の道の，次の関数

$$h(t)=t^2 \log \frac{1}{t} \log\log\log \frac{1}{t}$$

に関するハウスドルフ測度(1.2 節でのハウスドルフ測度の定義式における $|U_i|^s$ を $h(U_i)$ で置き換えたもの)は，正で有限の値をとることを示した．

同様に，ブラウン運動の道の 2 重点，3 重点，一般に多重点に関するハウスドルフ次元を求める問題も考えられている．また，より一般な Lévy の安定過程に対しても，同様の問題が考察されている．これらについての詳しい考察および文献に関しては，Rogers (1970, 133 頁)，Pruitt & Taylor (1969)，Taylor (1973)，Pruitt (1975)，Adler (1981) および Mandelbrot (1982, 39 節) を参照されたい．

8.9 結　　語

本章では，フラクタル集合に関する話題のいくつかを取り上げ，本書で論じてきた幾何学的測度論との関係を述べた．Mandelbrot(1975, 1977, 1982) の本の中に，その他のフラクタル集合の全容を見ることができるが，まだ厳密な数学的解析がなされていないものが多い．関連した話題の文献としては，これらの本およびハウスドルフ測度の応用に関する Roger(1970) の本の最終章における文献表を参照していただきたい．

本書で扱った研究の多くは，特に最近のものではないけれども，新旧さまざまの多くの未解決問題を含んでいる．フラクタル集合の幾何学に関する理論およびその応用は，これからも活発に研究され続けるに違いない．最後にあたり，掛谷問題に関する Besicovitch の映画から引用して，本書をしめくくりたい：「成功が，これらの問題を研究する人々の努力の最後を飾りますように」．

第8章の練習問題

8.1　(8.1) 式における c が x に依存しても，定理 8.1 は正しいことを示せ．

8.2　$\mathbb{R}$ 上の連続的微分可能な関数のグラフは 1 集合であることを示せ．

8.3　ワイエルシュトラス関数 (8.3) のグラフのハウスドルフ次元は s 以下になることを示せ．

8.4　関数 f: $[0,1]\to\mathbb{R}$ のグラフを Γ とする．もし，あらゆる有限分割 $0\leq x_0<\cdots<x_m\leq 1$ に対して $\sum_{i=1}^{m}|f(x_i)-f(x_{i-1})|^s\leq c$ ならば，$\mathcal{H}^s(\Gamma)<\infty$ となることを示せ．

8.5　$\mathbb{R}^n$ 内の縮小写像の組 $\{\psi_j\}_1^m$ は，開集合条件 (8.19) を満たしているとする．さらに，各 j とすべての x, y に対して，

$$q_j|x-y|\leq|\psi_j(x)-\psi_j(y)|\leq r_j|x-y|$$

が成り立つとし，E をこの縮小写像の組に対する不変集合とする．このとき，定理 8.6 の証明を応用して，$s'\leq\dim E\leq t$ となることを示せ．ただし，$s'=s-\log(\max(r_j/q_j))/\log(\min(1/q_j))$ であり，s と t は

$\sum_1^m q_j^s=1=\sum_1^m r_j^t$ によって定まる正数である．

8.6 開集合 $V\subset\mathbb{R}^n$ に対する最大接触円による詰め込みを $\{B_i\}_1^\infty$ とする．このとき，各 B_i と同じ中心をもち，半径が2倍の閉球を B_i' とすると，$V\subset\bigcup_i B_i'$ が成り立つことを示せ．このことから，剰余集合のハウスドルフ次元は，詰め込み指数以下であることを導け．

8.7 図8.4に示した正三角形による詰め込みに対する剰余集合は，$s=\log 3/\log 2$ に対する s 集合であることを示せ．（剰余集合は自己相似であることに注意せよ．）

8.8 $f(x)=\dfrac{3}{2}(1-|2x-1|)$ で定義された写像 $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ は，原点0を不動点にもちカントール集合 E を不変集合にもつことを示せ．さらに，$x\in E\setminus\{0\}$ ならば，反復 $f^m(x)$ は E 内で稠密になること，また，$x\notin E$ ならば，$m\to\infty$ のとき $f^m(x)\to-\infty$ となることを示せ．（3進展開して考えるとよい．）

参考文献

（[　] 内の数字は，その文献が言及された節の番号を示す．）

Adler, R.J. (1981). *The Geometry of Random Fields.* New York: Wiley. [8.8]

Alexander, R. (1975). 'Random compact sets related to the Kakeya problem'. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **53**, 415–19. [7.2]

van Alphén, H.J. (1942). 'Uitbreiding van een stelling von Besicovitch'. *Mathematica, Zutphen, B*, **10**, 144–57. [7.2]

Anderson, R.D. & Klee, V.L. (1952). 'Convex functions and upper semi-continuous functions'. *Duke Mathematical Journal*, **19**, 349–57. [8.6]

Baker, A. (1975). *Transcendental Number Theory.* Cambridge University Press. [8.5]

Baker, A. & Schmidt, W.M. (1970). 'Diophantine approximation and Hausdorff dimension'. *Proceedings of the London Mathematical Society* (3), **21**, 1–11. [8.5]

Baker, R.C. (1978). 'Dirichlet's theorem on Diophantine approximation'. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, **83**, 37–59. [8.5]

Barenblatt, G. I., Iooss, G & Joseph, D. D. (eds.). (1983). *Nonlinear Dynamics and Turbulence.* London: Pitman. [8.7]

Beardon, A.F. (1965). 'On the Hausdorff dimension of general Cantor sets'. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, **61**, 679–94. [1.5]

Bernard, P. & Ratiu, T. (eds.). (1977). Turbulence Seminar (Berkley). *Lecture Notes in Mathematics* **615**, New York: Springer. [8.7]

Berry, M.V. & Lewis, Z.V. (1980). 'On the Weierstrass–Mandelbrot fractal function'. *Proceedings of the Royal Society of London*, **A370**, 459–84. [8.2]

Besicovitch, A.S. (1919). 'Sur deux questions d'intégrabilité des fonctions. *J. Soc. Phys.-Math. (Perm')*, **2**, 105–23. [7.1, 7.2]

Besicovitch, A.S. (1928*a*). 'On the fundamental geometrical properties of linearly measurable plane sets of points'. *Mathematische Annalen*, **98**, 422–64. [1.2, 2.2, 3.1, 3.3, 3.4, 3.5, 6.4]

Besicovitch, A.S. (1928*b*). 'On Kakeya's problem and a similar one'. *Mathematische Zeitschrift*, **27**, 312–20. [7.1, 7.2]

Besicovitch, A.S. (1929). 'On linear sets of points of fractional dimension'. *Mathematische Annalen*, **101**, 161–93. [2.2]

Besicovitch, A.S. (1934*a*). 'On tangents to general sets of points'. *Fundamenta Mathematicae*, **22**, 49–53. [3.2]

Besicovitch, A.S. (1934*b*). 'Sets of fractional dimensions IV: On rational approximation to real numbers'. *Journal of the London Mathematical Society*, **9**, 126–31. [8.5]

Besicovitch, A.S. (1938). 'On the fundamental geometric properties of linearly measurable plane sets of points II'. *Mathematische Annalen*, **115**, 296–329. [1.2, 2.2, 3.1, 3.2, 3.3, 3.4, 3.5]

Besicovitch, A.S. (1939). 'On the fundamental geometric properties of linearly measurable plane sets of points III'. *Mathematische Annalen*, **116**, 349–57. [6.1, 6.4]

Besicovitch, A.S. (1942). 'A theorem on *s*-dimensional measure of sets of points'.

Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, **38**, 24–7. [1.2]

Besicovitch, A.S. (1944). 'On the existence of tangents to rectifiable curves'. *Journal of the London Mathematical Society*, **19**, 205–7. [3.2]

Besicovitch, A.S. (1945*a*). 'A general form of the covering principle and relative differentiation of additive functions'. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, **41**, 103–10. [1.3, 2.2]

Besicovitch, A.S. (1945*b*). 'On the definition and value of the area of a surface'. *Quarterly Journal of Mathematics (Oxford)*, **16**, 88–102. [3.5]

Besicovitch, A.S. (1946). 'A general form of the covering principle and relative differentiation of additive functions II'. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, **42**, 1–10. [1.3]

Besicovitch, A.S. (1947). 'Corrections to Besicovitch (1946)'. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, **43**, 590. [1.3]

Besicovitch, A.S. (1948). 'On distance sets'. *Journal of the London Mathematical Society*, **23**, 9–14. [7.4]

Besicovitch, A.S. (1949). 'Parametric surfaces II. Lower semi-continuity of the area'. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, **45**, 14–23. [3.5]

Besicovitch, A.S. (1950). 'Parametric surfaces'. *Bulletin of the American Mathematical Society*, **56**, 288–96. [3.5]

Besicovitch, A.S. (1952). 'On existence of subsets of finite measure of sets of infinite measure'. *Indagationes Mathematicae*, **14**, 339–44. [5.1, 5.2]

Besicovitch, A.S. (1954). 'On approximation in measure to Borel sets by F_σ-sets'. *Journal of the London Mathematical Society*, **29**, 382–3. [1.2]

Besicovitch, A.S. (1956). 'On the definition of tangents to sets of infinite linear measure'. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, **52**, 20–9. [3.2]

Besicovitch, A.S. (1957). 'Analysis of tangential properties of curves of infinite length'. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, **53**, 69–72. [3.2]

Besicovitch, A.S. (1960). 'Tangential properties of sets and arcs of infinite linear measure'. *Bulletin of the American Mathematical Society*, **66**, 353–9. [3.2]

Besicovitch, A.S. (1963*a*). 'On singular points of convex surfaces'. In *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, **7**, 21–3. Providence: American Mathematical Society. [8.6]

Besicovitch, A.S. (1963*b*). 'On the set of directions of linear segments on a convex surface'. In *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, **7**, 24–5. Providence: American Mathematical Society. [8.6]

Besicovitch, A.S. (1963*c*). 'The Kakeya problem'. *American Mathematical Monthly*, **70**, 697–706. [7.2]

Besicovitch, A.S. (1964*a*). 'On fundamental geometric properties of plane line-sets'. *Journal of the London Mathematical Society*, **39**, 441–8. [7.1, 7.3]

Besicovitch, A.S. (1964*b*). 'On one-sided densities of arcs of positive two-dimensional measure'. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, **60**, 517–24. [8.2]

Besicovitch, A.S. (1965*a*). 'Arcs and chords'. *Proceedings of the London Mathematical Society* (3), **14A**, 28–37. [8.2]

Besicovitch, A.S. (1965*b*). 'On arcs that cannot be covered by an open equilateral triangle of side 1'. *Mathematical Gazette*, **49**, 286–8. [7.4]

Besicovitch, A.S. (1967). 'Arcs and chords II'. *Journal of the London Mathematical Society*, **42**, 86–92. [8.2]

Besicovitch, A.S. (1968). 'On linear sets of points of fractional dimensions II'. *Journal of the London Mathematical Society*, **43**, 548–50. [4.2]

Besicovitch, A.S. & Miller, D.S. (1948). 'On the set of distances between the points of a Carathéodory linearly measurable plane point set'. *Proceedings of the London Mathematical Society* (2), **50**, 305–16. [7.4]

Besicovitch, A.S. & Moran, P.A.P. (1945). 'The measure of product and cylinder sets'. *Journal of the London Mathematical Society*, **20**, 110–20. [5.3]

Besicovitch, A.S. & Rado, R. (1968). 'A plane set of measure zero containing circumferences of every radius'. *Journal of the London Mathematical Society*, **43**, 717–9. [7.3]

Besicovitch, A.S. & Taylor, S.J. (1952). 'On the set of distances between points of a general metric space'. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, **48**, 209–14. [7.4]

Besicovitch, A.S. & Taylor, S.J. (1954). 'On the complementary intervals of linear closed sets of zero Lebesgue measure'. *Journal of the London Mathematical Society*, **29**, 449–59. [1.5]

Besicovitch, A.S. & Ursell, H.D. (1937). 'Sets of fractional dimensions, v: On dimensional numbers of some continuous curves'. *Journal of the London Mathematical Society*, **12**, 18–25. [8.2]

Besicovitch, A.S. & Walker, G. (1931). 'On the density of irregular linearly measurable sets of points'. *Proceedings of the London Mathematical Society* (2), **32**, 142–53. [3.3]

Best, E. (1942). 'On sets of fractional dimensions III', *Proceedings of the London Mathematical Society* (2), **47**, 436–54. [1.5]

Blank, A.A. (1963). 'A remark on the Kakeya problem'. *American Mathematical Monthly*, **70**, 706–11. [7.4]

Blaschke, W. (1916). *Kreis und Kugel*. Leipzig. [3.2]

Borel, E. (1895). 'Sur quelques points de la théorie des fonctions'. *Ann. École Norm. sup.* (3), **12**, 9–55. [Int.]

Boyd, D.W. (1973*a*). 'Improved bounds for the disc packing constant'. *Aequationes Mathematicae*, **9**, 99–106. [8.4]

Boyd, D.W. (1973*b*). 'The residual set dimension of the Apollonian packing'. *Mathematika*, **20**, 170–4. [8.4]

Burkill, J.C. (1971). 'Abram Samoilovitch Besicovitch'. *Biogràphical Memoirs of Fellows of the Royal Society*, **17**, 1–16. [Int.]

Burkill, J.C. & Burkill, H. (1970). *A Second Course in Mathematical Analysis*. Cambridge University Press. [3.2]

Burton, G. (1979). 'The measure of the *s*-skeleton of a convex body'. *Mathematika*, **26**, 290–301. [8.6]

Campanino, M. & Epstein, H. (1981). 'On the existence of Feigenbaum's fixed point'. *Communications in Mathematical Physics*, **79**, 261–302. [8.7]

Carathéodory, C. (1914). 'Über das lineare Mass von Punktmengeneine Verallgemeinerung des Längenbegriffs'. *Nach. Ges. Wiss. Göttingen*, pp. 404–26. [Int.]

Carleson, L. (1967). *Selected Problems on Exceptional Sets*. Princeton: Van Nostrand. [6.2, 6.3]

Casas, A. (1978). 'Aplicaciones de la teoría de medida lineal'. Tesis, Univ. Complutense de Madrid. [7.2]

Casas, A. & de Guzmán, M. (1981). 'On the existence of Nikodym sets and related topics'. *Rendiconti del Circolo Matematico de Palermo* (2), 1981, supp. No. 1, 69–73. [7.2]

Cigler, J. & Volkmann, B. (1963). 'Über die Häufigkeit von Zahlenfolgen mit gegebener Verteilingsfunktion'. *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamberg*, **26**, 39–54. [1.5]

Coxeter, H.S.M. (1961). *Introduction to Geometry*. New York: Wiley. [8.4]

Croft, H.T. (1965). Review of Besicovitch (1964). *Mathematical Reviews*, **30**, # 2122 [7.3]

Cunningham, F. (1971). 'The Kakeya problem for simply connected and for star-shaped sets'. *American Mathematical Monthly*, **78**, 114–29. [7.2, 7.4]

Cunningham, F. (1974). 'Three Kakeya problems'. *American Mathematical Monthly*, **81**, 582–92. [7.4]

Cunningham, F. & Schoenberg, I.J. (1965). 'On the Kakeya constant'. *Canadian Journal of Mathematics*, **17**, 946–56. [7.4]

Dalla, L. & Larman, D.G. (1980). 'Convex bodies with almost all k-dimensional sections polytopes'. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, **88**, 395–401. [8.6]

Darst, R. & Goffman, C. (1970). 'A Borel set which contains no rectangle'. *American Mathematical Monthly*, **77**, 728–9. [7.4]

Davies, R.O. (1952*a*). 'On accessibility of plane sets and differentiation of functions of two real variables'. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, **48**, 215–32. [7.2, 7.4]

Davies, R.O. (1952*b*). 'Subsets of finite measure in analytic sets'. *Indagationes Mathematicae*, **14**, 488–9. [5.2]

Davies, R.O. (1956). 'A property of Hausdorff measure'. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, **52**, 30–4. [1.2]

Davies, R.O. (1965). 'A regular line-set covering finite measure'. *Journal of the London Mathematical Society*, **40**, 503–8. [7.3]

Davies, R.O. (1968). 'A theorem on the existence of non-σ-finite subsets'. *Mathematika*, **15**, 60–2. [5.2]

Davies, R.O. (1969). 'Measures of Hausdorff type'. *Journal of the London Mathematical Society* (2), **1**, 30–4. [1.2]

Davies, R.O. (1970). 'Increasing sequences of sets and Hausdorff measure'. *Proceedings of the London Mathematical Society* (3), **20**, 222–36. [5.1]

Davies, R.O. (1971). 'Some remarks on the Kakeya problem'. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, **69**, 417–21. [7.3, 7.4]

Davies, R.O. (1972). 'Another thin set of circles'. *Journal of the London Mathematical Society* (2), **5**, 191–2. [7.3]

Davies, R.O. (1979). 'Two counter-examples concerning Hausdorff dimensions of projections'. *Colloquium Mathematicum*, **42**, 53–8. [6.3]

Davies, R.O. (1982). 'Some counter-examples in measure theory'. *Proceedings of the Conference Topology and Measure* III. (Vitte, 1980), Part I, pp. 49–55. Greifswald: Ernst-Moritz-Arndt Universität. [6.3]

Davies, R.O. & Fast, H. (1978) 'Lebesgue density influences Hausdorff measure; large sets surface-like from many directions'. *Mathematika*, **25**, 116–19. [1.5]

Davies, R.O., Marstrand, J.M. & Taylor, S.J. (1960). 'On the intersection of transforms of linear sets'. *Colloquium Mathematicum*, **7**, 237–43. [7.4]

Davies, R.O. & Samuels, P. (1974). 'Density theorems for measures of Hausdorff type'. *Bulletin of the London Mathematical Society*, **6**, 31–6. [1.2, 2.2]

Dekking, F.M. (1982). 'Recurrent sets'. *Advances in Mathematics*, **44**, 78–104. [8.3]

Dickinson, D.R. (1939). 'Study of extreme cases with respect to the densities of irregular linearly measurable plane sets of points'. *Mathematische Annalen*, **116**, 359–73. [2.2]

Dunford, N. & Schwartz, J.T. (1958). *Linear Operators, Part I*. New York: Interscience. [3.2]

Eggleston, H.G. (1949). 'Note on certain s-dimensional sets'. *Fundamenta Mathematicae*, **36**, 40–3. [7.4]

Eggleston, H.G. (1950*a*). 'The Besicovitch dimension of Cartesian product sets'. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, **46**, 383–6. [5.3]

Eggleston, H.G. (1950*b*). 'A geometrical property of sets of fractional dimension'. *Quarterly Journal of Mathematics, Oxford Series* (2), **1**, 81–5. [5.3]

Eggleston, H.G. (1952). 'Sets of fractional dimensions which occur in some problems of number theory'. *Proceedings of the London Mathematical Society* (2), **54**, 42–93. [1.5, 8.5]

Eggleston, H.G. (1953*a*). 'On closest packing by equilateral triangles'. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, **49**, 26–30. [8.4]

Eggleston, H.G. (1953*b*). 'A correction to a paper on the dimension of Cartesian product sets'. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, **49**, 437–40. [5.3]

Eggleston, H.G. (1957). *Problems in Euclidean Space-Applications of Convexity*. London: Pergamon. [7.4]

Eggleston, H.G. (1958). *Convexity*. Cambridge University Press. [1.4]

Erdös, P. (1946), 'On the Hausdorff dimension of some sets in Euclidean space'. *Bulletin of the American Mathematical Society*, **52**, 107–9. [1.5]

Erdös, P. & Gillis, J. (1937). 'Note on the transfinite diameter'. *Journal of the London Mathematical Society*, **12**, 185–92. [6.2]

Ernst, L.R. & Freilich, G. (1976). 'A Hausdorff measure inequality'. *Transactions of the American Mathematical Society*, **219**, 361–8. [5.3]

Ewald, G., Larman, D.G. & Rogers, C.A. (1970). 'The directions of the line segments and of the *r*-dimensional balls in the boundary of a convex body in Euclidean space'. *Mathematika*, **17**, 1–20. [8.6]

Faber, V., Mycielski, J. & Pedersen, P. (1984). 'On the shortest curve which meets all the lines which meet a circle'. *Annales Polonici Mathematici*, **44**, 249–66. [3.2]

Falconer, K.J. (1980*a*). 'Continuity properties of *k*-plane integrals and Besicovitch sets. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, **87**, 221–6. [7.3]

Falconer, K.J. (1980*b*). 'Sections of sets of zero Lebesgue measure'. *Mathematika*, **27**, 90–6. [7.3]

Falconer, K.J. (1982). 'Hausdorff dimension and the exceptional set of projections'. *Mathematika*, **29**, 109–15. [6.3, 7.4]

Falconer, K.J. (1984). 'On a problem of Erdös on sequences and measurable sets'. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **90**, 77–8. [7.4]

Federer, H. (1947). 'The (ϕ, k) rectifiable subsets of *n*-space'. *Transactions of the American Mathematical Society*, **62**, 114–92. [Int., 3.5, 6.4]

Federer, H. (1969). *Geometric Measure Theory*. New York: Springer. [Int., 3.5, 6.4, 6.5]

Fefferman, C. (1971). 'The multiplier problem for the ball'. *Annals of Mathematics*, **94**, 330–6. [7.5]

Feigenbaum, M.J. (1978). 'Quantitative universality for a class of non-linear transformations'. *Journal of Statistical Physics*, **19**, 25–52. [8.7]

Feigenbaum, M.J. (1979). 'The universal metric properties of nonlinear transformations'. *Journal of Statistical Physics*, **21**, 669–706. [8.7]

Feigenbaum, M.J. (1981). 'Universal behaviour in non-linear systems'. *Los Alamos Science*, **1**, 4–27. [8.7]

Fisher, B. (1973). 'On a problem of Besicovitch'. *American Mathematical Monthly*, **80**, 785–7. [7.2]

Frederickson, P., Kaplan, J., Yorke, E. & Yorke, J. (1983). 'The Lyapunov dimension of strange attractors'. *Journal of Differential Equations*, **49**, 185–207. [8.7]

Freilich, G. (1950). 'On the measure of Cartesian product sets'. *Transactions of the American Mathematical Society*, **69**, 232–75. [5.3]

Freilich, G. (1965). 'Carathéodory measure of cylinders'. *Transactions of the American Mathematical Society*, **114**, 384–400. [5.3]

Freilich, G. (1966). 'Gauges and their densities'. *Transactions of the American Mathematical Society*, **122**, 153–62. [2.2]

Frostman, O. (1935). 'Potential d'équilibre et capacité des ensembles avec quelques applications à la théorie des fonctions'. *Meddel. Lunds Univ. Math. Sem.*, **3**, 1–118. [6.2]

Fujiwara, M. & Kakeya, S. (1917). 'On some problems of maxima and minima for the curve of constant breadth and the in-revolvable curve of the equilateral triangle'. *Tôhoku Mathematical Journal*, **11**, 92–110. [7.1]

Garnett, J. (1970). 'Positive length but zero analytic capacity'. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **24**, 696–9. [6.2]

Gillis, J. (1934*a*). 'On the projection of irregular linearly measurable plane sets of points'. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, **30**, 47–54. [6.4]

Gillis, J. (1934*b*). 'On linearly measurable plane sets of points of upper density $\frac{1}{2}$' *Fundamenta Mathematicae*, **22**, 57–69. [3.3]

Gillis, J. (1935). 'A theorem on irregular linearly measurable sets of points', *Journal of the London Mathematical Society*, **10**, 234–40. [2.2]

Gillis, J. (1936*a*). 'Note on the projection of irregular linearly measurable plane sets of points'. *Fundamenta Mathematicae*, **26**, 228–33. [6.4]

Gillis, J. (1936*b*). 'On linearly measurable sets of points'. *Comptes Rendus des Séances de la Societé des Sciences et des Lettres de Varsovie*, **28**, 49–70. [6.4]

Gołąb, S. (1929). 'Sur quelques points de la théorie de la longueur'. *Ann. Soc. Polon. Math.*, **7**, 227–41. [3.2]

Good, I.J. (1941). 'The fractional dimension theory of continued fractions'. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, **37**, 199–288. [8.5]

Grassberger, P. (1981). 'On the Hausdorff dimension of fractal attractors'. *Journal of Statistical Physics*, **26**, 173–9 [8.7]

Guckenheimer, J. & Holmes, P. (1983). *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, New York: Springer. [8.7]

de Guzmán, M. (1975). '*Differentiation of Integrals in* $\mathbb{R}^n$'. Berlin: *Springer Lecture Notes in Mathematics* **481**. [1.3, 7.2, 7.5]

de Guzmán, M. (1979). 'Besicovitch theory of linearly measurable sets and Fourier analysis'. In *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, **35**, (1), *Harmonic Analysis in Euclidean Spaces*, pp. 61–7. Providence: American Mathematical Society. [7.2]

de Guzmán, M. (1981). 'Real variable methods in Fourier analysis'. Amsterdam: North Holland, *Mathematical Studies* **46**. [1.3, 3.1, 7.2, 7.5]

Haken, H. (1982). (Ed). *Evolution of Order and Chaos in Physics, Chemistry and Biology*. New York: *Springer Series in Synergetics*, **17**. [8.7]

Hausdorff, F. (1919). 'Dimension und äusseres Mass'. *Mathematische Annalen*, **79**, 157–79. [Int.]

Hawkes, J. (1974). 'Hausdorff measure, entropy and the independence of small sets'. *Proceedings of the London Mathematical Society* (3), **28**, 700–24. [Int.]

Hayman, W.K. & Kennedy, P.B. (1976). *Subharmonic Functions*, Volume 1. New York: Academic Press. [6.2]

Hénon, M. & Pomeau, Y. (1976). 'Two strange attractors with a simple structure'. In *Turbulence and Navier–Stokes Equations*, ed. R. Temam, pp. 29–68. *Lecture Notes in Mathematics* **565**, New York: Springer. [8.7]

Hida, T. (1980). *Brownian Motion*. New York: Springer-Verlag. [8.8]

Hille, E. (1973). *Analytic Function Theory*, Volume 2., 2nd ed. New York: Chelsea Publishing Company. [6.2]

Hirst, K.E. (1967). 'The Apollonian packing of circles'. *Journal of the London Mathematical Society*, **42**, 281–91. [8.4]
Hofstadter, D.R. (1981). 'Strange attractors: mathematical patterns delicately poised between order and chaos'. *Scientific American*, **245** (November), 16–29. [8.7]
Hurewicz, W. & Wallman, H. (1941). *Dimension Theory*. Princeton University Press. [Int.]
Hutchinson, J.E. (1981). 'Fractals and self-similarity'. *Indiana University Mathematics Journal*, **30**, 713–47. [8.3]
Ivanov, L.D. (1975). *Variatsii mnozhestv i funktsii* (Russian). Moscow: Nauka. [3.5]
Jarník, V. (1931). 'Über die simultanen diophantischen Approximationen'. *Mathematische Zeitschrift*, **33**, 505–43. [8.5]
Johnson, R.A. & Rogers, C.A. (1982). 'Hausdorff measure and local measure'. *Journal of the London Mathematical Society* (2), **25**, 99–114. [Int.]
Jonker, L. & Rand, D. (1981*a*). 'Bifurcations in one dimension I. The non-wandering set'. *Inventiones Mathematicae*, **62**, 347–65. [8.7]
Jonker, L. & Rand, D. (1981*b*). 'Bifurcations in one dimension II. A versal model for bifurcations'. *Inventiones Mathematicae*, **63**, 1–15. [8.7]
Kahane, J.P. (1969). 'Trois notes sur les ensembles parfaits lineaires'. *L'enseignement Mathematique Revue Internationale* (2), **15**, 185–92. [7.2]
Kahane, J.P. (1976). 'Mesures et dimensions'. In *Turbulence and Navier–Stokes Equations*, ed. R. Temam, pp. 94–103. *Lecture Notes in Mathematics 565*, New York: Springer. [Int.]
Kakeya, S. (1917). 'Some problems on maxima and minima regarding ovals'. *Tôhoku Science Reports*, **6**, 71–88. [7.1]
Kametani, S. (1945). 'On Hausdorff's measures and generalized capacities with some of their applications to the theory of functions'. *Japanese Journal of Mathematics*, **19**, 217–57. [6.2]
Kaufman, R. (1968). 'On Hausdorff dimension of projections'. *Mathematika*, **15**, 153–5. [6.3]
Kaufman, R. (1969). 'An exceptional set for Hausdorff dimension'. *Mathematika*, **16**, 57–8. [8.5]
Kaufman, R. (1970). 'Probability, Hausdorff dimension and fractional distribution'. *Mathematika*, **17**, 63–7. [8.5]
Kaufman, R. (1981). 'On the theorem of Jarník and Besicovitch'. *Acta Arithmetica*, **39**, 265–7. [8.5]
Kaufman, R. & Mattila, P. (1975). 'Hausdorff dimension and exceptional sets of linear transformations'. *Annales Academiae Scientiarum Fennicae A*, **1**, 387–92. [6.3, 8.5]
Kingman, J.F.C. (1973). 'Subadditive ergodic theory'. *Annals of Probability*, **1**, 883–909. [8.4]
Kingman, J.F.C. (1976). 'Subadditive processes'. In *École d'Été de Probabilitiés de Saint-Flour V*, pp. 167–223. *Lecture notes in Mathematics* **539**, New York: Springer. [8.4]
Kingman, J.F.C. & Taylor, S.J. (1966). *Introduction to Measure and Probability*. Cambridge University Press. [1.1, 3.2, 6.2]
Kinney, J.R. (1968). 'A thin set of circles'. *American Mathematical Monthly*, **75**, 1077–81. [7.4]
Kinney, J.R. (1970). 'A thin set of lines'. *Israel Journal of Mathematics*, **8**, 97–102. [7.2]
Klee, V.L. (1957). 'Research problem no. 5', *Bulletin of the American Mathematical Society*, **63**, 419. [8.6]
Klee, V.L. (1959). 'Some characterizations of convex polyhedra'. *Acta Mathematica*, **102**, 79–107. [8.6]
Kline, S.A. (1945). 'On curves of fractional dimension'. *Journal of the London Mathematical Society*, **20**, 79–86. [8.2]

Lanford, O.E. (1982). 'A computer assisted proof of the Feigenbaum conjectures'. *Bulletin of the American Mathematical Society* (2), **6**, 427–34. [8.7]

Larman, D.G. (1966). 'On the exponent of convergence of a packing of spheres'. *Mathematika*, **13**, 57–9. [8.4]

Larman, D.G. (1967*a*). 'On Hausdorff measure in finite-dimensional compact metric spaces'. *Proceedings of the London Mathematical Society* (3), **17**, 193–206. [5.3]

Larman, D.G. (1967*b*). 'On the Besicovitch dimension of the residual set of arbitraily packed discs in the plane'. *Journal of the London Mathematical Society*, **42**, 292–302. [8.4]

Larman, D.G. (1967*c*). 'On the convex measure of product and cylinder sets'. *Journal of the London Mathematical Society*, **42**, 447–55. [5.3]

Larman, D.G. (1971*a*). 'A compact set of disjoint line segments in E^3 whose end set has positive measure'. *Mathematika*, **18**, 112–25. [7.2]

Larman, D.G. (1971*b*). 'On a conjecture of Klee and Martin for convex bodies'. *Proceedings of the London Mathematical Society* (3), **23**, 668–82. [8.6]

Lebesgue, H. (1904). *Leçons sur l'intégration et la récherche des fonctions primitives*. Paris: Gauthier-Villars. [Int.]

Lorenz, E.N. (1963). 'Deterministic nonperiodic flows'. *Journal of the Atmospheric Sciences*, **20**, 130–41. [8.7]

Love, E.R. & Young, L.C. (1937). 'Sur une classe de fonctionnelles linéaires'. *Fundamenta Mathematicae*, **28**, 243–57. [8.2]

Mandelbrot, B.B. (1975). *Les objects fractals: forme, hasard et dimension*. Paris: Flammarion. [Int., 8.9]

Mandelbrot, B.B. (1977). *Fractals: Form, Chance, and Dimension*. San Francisco: W.H. Freeman & Co. [Int., 8.2, 8.3, 8.9]

Mandelbrot, B.B. (1982). *The Fractal Geometry of Nature*. San Francisco: W.H. Freeman & Co. [Int., 8.3, 8.7, 8.8, 8.9]

Mandelbrot, B.B. (1983). 'On discs and sigma discs, that osculate the limit sets of groups of inversions'. *Mathematical Intelligencer*, **5**, No. 2, 9–17. [8.4]

Marion, J. (1979). 'Le calcul de la mesure Hausdorff des sous-ensembles parfaits isotypiques de $\mathbb{R}^m$'. *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris*, **289**, A65–A68. [8.3]

Marstrand, J.M. (1954*a*). 'Some fundamental geometrical properties of plane sets of fractional dimensions'. *Proceedings of the London Mathematical Society* (3), **4**, 257–302. [2.2, 4.1, 4.2, 4.3, 6.1, 6.3, 6.4, 6.5, 8.5]

Marstrand, J.M. (1954*b*). 'The dimension of Cartesian product sets'. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, **50**, 198–202. [5.1, 5.3]

Marstrand, J.M. (1955). 'Circular density of plane sets'. *Journal of the London Mathematical Society*, **30**, 238–46. [4.1, 4.3]

Marstrand, J.M. (1961). 'Hausdorff two-dimensional measure in 3-space', *Proceedings of the London Mathematical Society* (3), **11**, 91–108. [3.5]

Marstrand, J.M. (1964). 'The (ϕ, s)-regular subsets of n-space'. *Transactions of the American Mathematical Society*, **113**, 369–92. [3.5, 4.1, 4.4]

Marstrand, J.M. (1972). 'An application of topological transformation groups to the Kakeya problem'. *Bulletin of the London Mathematical Society*, **4**, 191–5. [7.4]

Marstrand, J.M. (1979*a*). 'Packing smooth curves in $\mathbb{R}^q$'. *Mathematika*, **26**, 1–12. [7.4]

Marstrand, J.M. (1979*b*). 'Packing planes in $\mathbb{R}^3$'. *Mathematika*, **26**, 180–3. [7.3]

Mattila, P. (1975*a*). 'Hausdorff m regular and rectifiable sets in n-space'. *Transactions of the American Mathematical Society*, **205**, 263–74. [3.5]

Mattila, P. (1975*b*). 'Hausdorff dimension, orthogonal projections and intersections with planes'. *Annales Academiae Scientiarum Fennicae A*, **1**, 227–44. [6.3, 6.5]

Mattila, P. (1981). 'Integralgeometric properties of capacities'. *Transactions of the American Mathematical Society*, **266**, 539–54. [6.5]

Mattila, P. (1982). 'On the structure of self-similar fractals'. *Annales Academiae Scientiarum Fennicae A*, **7**, 189–95. [6.5]

Mattila, P. (1984*a*). 'Hausdorff dimension and capacities of intersections of sets in *n*-space'. *Acta Mathematica*, **152**, 77–105. [6.5]

Mattila, P. (1984*b*). 'An integral inequality for capacities'. *Mathematica Scandinavica*, **53**, 256–64. [6.5]

Mattila, P. (1985). 'A class of sets with positive length and zero analytic capacity. *Annales Academiae Scientiarum Fennicae A*, **10**, 387–95. [6.2].

May, R.M. (1976). 'Simple mathematical models with very complicated dynamics'. *Nature*, **261**, 459–67. [8.7]

McMinn, T.J. (1960). 'On the line segments of a convex surface in E_3'. *Pacific Journal of Mathematics*, **10**, 943–6. [8.6]

Mitjagin, B.S. & Nikisin, E.M. (1973). 'On the divergence of Fourier Series almost everywhere'. *Doklady Akademin Nauk SSSR*, **210**, 23–5. [7.5]

Moore, E.F. (1950). 'Density ratios and $(\phi, 1)$ rectifibiality in *n*-space'. *Transactions of the American Mathematical Society*, **69**, 324–34. [3.5]

Moran, P.A.P. (1946). 'Additive functions of intervals and Hausdorff measure'. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, **42**, 15–23. [5.3, 8.3]

Moran, P.A.P. (1949). 'On plane sets of fractional dimensions'. *Proceedings of the London Mathematical Society* (2), **51**, 415–23. [5.3]

Morgan, G.W. (1935). 'The density directions of irregular linearly measurable plane sets'. *Proceedings of the London Mathematical Society* (2), **38**, 481–94. [2.2, 6.4]

Morse, A.P. & Randolph, J.F. (1944). 'The ϕ rectifiable subsets of the plane'. *Transactions of the American Mathematical Society*, **55**, 236–305. [3.3, 3.5]

Nikodym, O. (1927). 'Sur la mesure des ensembles plans dont tous les points sont rectalineairément accessibles'. *Fundamenta Mathematicae*, **10**, 116–68. [7.2]

Oberlin, D.M. & Stein, E.M. (1982). 'Mapping properties of the Radon transform'. *Indiana University Mathematics Journal*, **31**, 641–50. [7.3, 7.5]

Pál. J. (1921). 'Ein Minimumproblem für Ovale'. *Mathematische Annalen*, **83**, 311–9. [7.1, 7.4]

Patterson, S.J. (1976). 'The limit set of a Fuchsian group'. *Acta Mathematica*, **136**, 241–73. [8.4]

Pelling, M.J. (1977). 'Formulae for the arc-length of a curve in $\mathbb{R}^n$'. *American Mathematical Monthly*, **84**, 465–7. [3.2]

Perron, O. (1928). 'Über einen Satz von Besicovitch'. *Mathematische Zeitschrift*, **28**, 383–6. [7.1, 7.2]

Peyrière, J. (1977). 'Calculs de dimensions de Hausdorff'. *Duke Mathematical Journal*, **44**, 591–601. [1.5]

Pruitt, W.E. (1975). 'Some dimension results for processes with independent increments'. In *Stochastic Processes and Related Topics*, **1**, 133–65, ed. M.L. Puri, New York: Academic Press. [8.8]

Pruitt, W.E. & Taylor, S.J. (1969). 'Sample path properties of processes with stable components'. *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie*, **12**, 267–89. [8.8]

Putnam, C.R. (1974). 'The role of zero sets in the spectra of hypernormal operators'. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **43**, 137–40. [7.5]

Rademacher, H. (1962). 'On a theorem of Besicovitch'. In *Studies in Mathematical Analysis–Essays in Honour of G. Pólya*, pp. 294–6. Stanford University Press. [7.2]

Randolph, J.F. (1936). 'On generalizations of length and area'. *Bulletin of the American Mathematical Society*, **42**, 268–74. [5.3]
Randolph, J.F. (1941). 'Some properties of sets of the Cantor type'. *Journal of the London Mathematical Society*, **16**, 38–42. [1.5]
Ravetz, J. (1954). 'The Denjoy theorem and sets of fractional dimension'. *Journal of the London Mathematical Society*, **29**, 88–96. [1.5]
Ray, D. (1963). 'Sojourn times and the exact Hausdorff measure of the sample path for planar Brownian motion'. *Transactions of the American Mathematical Society*, **106**, 436–44. [8.8]
Reifenberg, E.R. (1960). 'Solution of the Plateau problem for *m*-dimensional surfaces of varying topological type'. *Acta Mathematica, Stockholm*, **104**, 1–92. [3.5]
Rogers, C.A. (1970). *Hausdorff Measure*. Cambridge University Press. [Int., 1.1, 1.2, 3.2, 5.1, 5.2, 8.5, 8.8, 8.9]
Rogers, C.A. et al. (1980). *Analytic Sets*. New York: Academic Press. [1.1]
Rudin, W. (1970). *Real and Complex Analysis*, New York: McGraw Hill. [6.2]
Rudin, W. (1973). *Functional Analysis*. New York: McGraw Hill. [6.2]
Ruelle, D. (1983). 'Bowen's formula for the Hausdorff dimension of self-similar sets'. In *scaling and self-similarity in physics-renormalization in statistical mechanics and dynamics*, Progress in physics, **7** Birkhauser [8.7]
Santaló, L.A. (1976). *Integral Geometry and Geometric Probability*. Reading, Massachusetts: Addison-Wesley. [6.4, 6.5]
Schmidt, W.M. (1980). *Diophantine Approximation*. Berlin: Springer, *Lecture Notes in Mathematics*, **785**. [8.5]
Schoenberg, I.J. (1962*a*). 'On certain minima related to the Besicovitch Kakeya problem'. *Mathematica (Cluj)*, **4** (27), 145–8. [7.2]
Schoenberg, I.J. (1962*b*). 'On the Besicovitch–Perron solution of the Kakeya problem'. In *Studies in Mathematical Analysis–Essays in Honour of G. Pólya.*, pp. 359–63. Stanford University Press. [7.2]
Simó, C. (1979). 'On the Hénon-Pomeau attractor'. *Journal of Statistical Physics*, **21**. 465–94. [8.7]
Smale, S. (1967). 'Differentiable dynamical systems'. *Bulletin of the American Mathematical Society*, **73**, 747–817. [8.7]
Soddy, F. (1936). 'The kiss precise'. *Nature*, **137**, 1021. [8.4]
Sparrow, C. (1982). *The Lorenz Equations: Bifurcations, Chaos, and Strange Attractors.* New York: Springer-Verlag. [8.7]
Stein, E.M. (1976). 'Maximal functions; spherical means'. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA*, **73**, 2174–5. [7.5]
Stein, E.M. & Wainger, S. (1978). 'Problems in harmonic analysis related to curvature'. *Bulletin of the American Mathematical Society*, **84**, 1239–95. [7.5]
Steinhaus, H. (1920). 'Sur les distances des points des ensembles de mesure positive'. *Fundementa Mathematicae*, **1**, 93–104. [7.4]
Stepney, S. (1984). 'Snowflakes and other monsters'. *Acorn User*, March 1984. [8.3]
Sullivan, D. (1979). 'The density at infinity of a discrete group of hyperbolic motions'. *Institut des Hautes Études Scientifiques. Publications Mathematics*, **50**, 171–202 [8.4]
Talagrand, M. (1980). 'Sur la measure de la projection d'un compact et certaines familles de cercles'. *Bulletin Sciences et Mathematiques*, **104**, 225–31. [7.3]
Taylor, S.J. (1952). 'On Cartesian product sets'. *Journal of the London Mathematical Society*, **27**, 295–304. [5.3]
Taylor, S.J. (1953). 'The Hausdorff α-dimensional measure of Brownian paths in *n*-space'.

Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, **48**, 31–9. [8.8]

Taylor, S.J. (1961). 'On the connection between Hausdorff measures and generalized capacities'. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, **57**, 524–31. [6.2]

Taylor, S.J. (1964). 'The exact Hausdorff measure of the sample path for planar Brownian motion'. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, **60**, 253–8. [8.8]

Taylor, S.J. (1973). 'Sample path properties of processes with stationary independent increments'. In *Stochastic Analysis*, eds. Kendall, D.G. & Harding, E.G., J. Wiley & Sons. [8.8].

Taylor, S.J. (1975). 'Abram Samoilovitch Besicovitch (obituary)'. *Bulletin of the London Mathematical Society*, **7**, 191–210. [Int., 7.4]

Temam, R. (1976) (ed.). *Turbulence and Navier–Stokes Equations*. New York: *Springer Lecture Notes in Mathematics*, **565**, [8.7]

Temam, R. (1983). *Navier–Stokes Equations and Non-linear Functional Analysis*. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics. [8.7]

Tricot, C. (1981). 'Douze definitions de la densité logarithmique'. *Comptes Rendus de séances de l'académie des sciences de Paris* (1), **293**, 549–52. [Int.]

Tricot, C. (1982). 'Two definitions of fractional dimension'. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, **91**, 57–74. [Int.]

Ugaheri, T. (1942). 'On the Newtonian capacity and the linear measure'. *Proceedings of the Imperial Academy of Japan*, **18**, 602–5. [6.2]

Ville, A. (1936). 'Ein satz über quadratische lange, Ergebrisse eins math'. *Kolloquiums (Wien)*, **7**, 22–3. [8.2]

Vitushkin, A.G. (1966). 'A proof of the upper semicontinuity of a set variation'. (Russian). *Doklady Akademin Nauk SSSR*, **166**, 1022–5. Translation: *Soviet Math. Dokl*, **7** (1966), 206–9. [3.5]

Wainger, S. (1979). 'Applications of Fourier transforms to averages over lower dimensional sets'. In *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, **35**, ed. S. Wainger & G. Weiss, pp. 85–94. Providence: American Mathematical Society. [Ex. 7.5]

Wainger, S. & Weiss, G. (1979) (eds.). 'Harmonic analysis in Euclidean spaces'. *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, **35**, Providence: American Mathematical Society. [7.5]

Walker, R.J. (1952). 'Addendum to Mr Greenwood's paper'. *Pi Mu Epsilon Journal*, **275**. [7.4]

Wallin, H. (1969). 'Hausdorff measures and generalized differentiation'. *Mathematische Annalen*, **183**, 275–86. [2.2, 6.2]

Ward, D.J. (1967). 'The measure of cylinder sets'. *Journal of the London Mathematical Society*, **42**, 401–8. [5.3]

Ward, D.J. (1970*a*). 'A set of plane measure zero containing all finite polygonal arcs'. *Canadian Journal of Mathematics*, **22**, 815–21. [7.4]

Ward, D.J. (1970b). 'Some dimensional properties of generalized difference sets'. *Mathematika*, **17**, 185–8. [7.4]

Watson, G.N. (1966). *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*. 3rd. ed. Cambridge University Press. [6.3]

Ważewski, T. (1927). 'Rectifiable continua in connection with absolutely continuous functions and mappings'. (Polish). *Ann. Soc. Polon. Math.*, **3**, 9–49. [3.2]

Wegmann, H. (1969*a*). 'Die Hausdorff-Dimension von kartesischen Produktmengen in metrischen Ráumen'. *Journal fur die Reine und Angewandte Mathematik*, **234**, 163–71. [5.3]

Wegmann, H. (1969*b*). 'Die Hausdorff-Dimension von Mengen reeler Zahlenfolgen'.

Journal fur die Reine und Angewandte Mathematik, **235**, 20–8. [5.3]
Wegmann, H. (1971*a*). 'Die Hausdorff-Dimension von kartesischen Produkten metrischer Räume'. *Journal fur die Reine und Angewandte Mathematik*, **246**, 46–75. [5.3]
Wegmann, H. (1971*b*). 'Das Hausdorff-Mass von Cantormengen'. *Mathematische Annalen*, **193**, 7–20. [1.5]
Wetzel, J.E. (1973). 'Sectorial covers for curves of constant length'. *Canadian Mathematical Bulletin*, **16**, 367–75. [7.4]
Whitley, D. (1983). 'Discrete dynamical systems in dimensions one and two'. *Bulletin of the London Mathematical Society*, **15**, 177–217. [8.7]
Wiener, N. (1923). 'Differential space'. *Journal of Mathematical Physics*, **2**, 131–74. [8.8]
Wilker, J.B. (1971). 'The non-Euclidean Kakeya problem'. In *Proceedings of the 25th Summer Meeting of the Canadian Mathematical Congress*, pp. 603–7. [7.4]

訳者あとがき

本書は，英国の Bristol 大学講師 K. J. Falconer 氏の
The Geometry of Fractal Sets, Cambridge University Press (1985)
の全訳である．

B. B. Mandelbrot 教授の提唱するフラクタル理論は，もっぱら数学上の反例と見られてきたカントール集合やコッホ曲線などの特異集合が，実は，非常に広範にわたって宇宙(自然)の中に見出せるではないかという想像力あふれる提案であり，まさに，価値観の転換である．そのフラクタル理論を深く理解するためには，やはり，その起源である Hausdorff や Besicovitch といった先人達によって築かれてきた古典的な数学の仕事を歴史的な位置付けとともに知っておくことが大切であろうと思う．Falconer 氏によって要領よくまとめられた本書は，そういう意味において最適の教科書であり，また座右の書として手軽に利用できるように書かれている．

いまから一年半ほど前であるが，パリ第 11 大学（オルセー）において，訳者が来学中の P. Mattila 教授にお会いしたときのことである．「幾何学的測度論に関するよい入門書を教えて欲しい」と尋ねたところ，教授は即座に本書を示されたのが印象に残っている．

類体論で有名な故高木貞治先生が，“A simple example of the continuous function without derivative” という題で，いたるところ有限微係数をもたない連続関数の簡単な例を発表されたのは，ドイツから帰国後まもない 1903 年(当時 28 歳)であった．今日，高木関数と呼ばれるこの関数は，その後，本質的に同じものが van der Waerden や G. de Rham といった人びとに再発見された．この高木関数は，ある種の無限個の簡単な中心差分を満たし，また，そのグラフは，典型的な自己相似性をもつなどの面白い性質をもっており，山口昌哉教授を中心とするフラクタル研究の出発点となった関数なのである．なお，第 8 章 2 節において登場したワイエルシュトラス関数については，最近，R. D. Mauldin と S. C. Williams (“On the Hausdorff dimension of some

graphs," *Trans. Amer. Math. Soc.*, 298 (1986)) たちが，ある場合にはグラフのハウスドルフ次元が真に1より大きくなることを初めて証明した.

本書の翻訳に際して，明らかな誤植などは断りなしに訂正しておいた．またいくつかの証明では説明が不十分と思われたので，——(訳者追加)——という形で証明を補充しておいたので御了解いただきたい.

最後に，この本の出版に際して，近代科学社編集部の牧野末喜氏の御尽力に深く感謝する次第である.

1988年 12月 16日

訳　者

索　引

（肉太数字は定義の書いてある頁を示す）

や　行

ら　行

わ　行

訳者略歴

畑　政義　(はた　まさよし)

1978年　京都大学理学部卒業
1980年　京都大学大学院理学研究科数学専攻
　　　　修士課程修了
1982年　同博士課程中退
1982年　京都大学理学部助手
1985年　理学博士(京都大学)
1990年　京都大学教養部助教授
1992年　京都大学総合人間学部助教授
　　　　現在にいたる.

フラクタル集合の幾何学　**検印省略**

© 1989年9月10日　初版発行
1997年7月10日　初版第4刷発行

原著者　K. J. ファルコナー
翻訳者　畑　政義
発行者　櫻井慧子
発行所　株式会社 近代科学社

〒162 東京都新宿区市ケ谷田町2-7-15
電話 03(3260)6161 振替(東京)6-7625

大日本法令印刷　**ISBN4-7649-1013-6**

定価はカバーに表示してあります.